Actualités Scientifiques et Industrielles

Exposés de Géométrie
Publiés sous la direction de

M. E. Cartan

Membre de l'Institut
Professeur á la Sorbonne
IX, XI

LEÇONS
sur
LA THÉORIE DES SPINEURS

PAR
ÉLIE CARTAN
D'après des notes recueillies et rédigées
PAR
ANDRÉ MERCIER
Docteur ès Sciences

1938

Э. Картан

Теория спиноров

Перевод с французского
под редакцией
профессора
П.А.Широкова

ПЛАТОН
1997

Э. Картан
Теория спиноров

Научное издание
Лицензия ЛР №024851 от 17.07.93 г.
Подписано к печати 05.09.97 г. Формат 60x88/16
Печ. п. 14 Заказ № 560.
Издательство "ПЛАТОН"
400062, г.Волгоград, ул.Кирова, 71/15

ISBN 5-80100-256-1

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

Автор издаваемых в русском переводе лекций по теории спиноров[1]) Э. Картан является творцом общей теории спиноров, основы которой он опубликовал в 1913 г. в своем классическом исследовании по теории представлений простых групп[2]). Теория спиноров — это один из наиболее интересных отделов тензорного исчисления, дающий глубокий анализ природы тензоров метрической геометрии. Книга Картана — первая в мировой литературе, излагающая общую теорию спиноров n-мерных пространств. Написана она элементарно: благодаря тому, что автор базируется в своем изложении на геометрических представлениях и пользуется при исследовании ортогональных групп методом бесконечно малых преобразований, его изложение отличается значительной простотой и наглядностью. Поэтому эта книга вполне доступна для аспирантов и студентов старших курсов физико-математических факультетов университетов[3]). Благодаря богатству содержащихся в ней идей и методов исследования она значительно расширяет кругозор начинающего математика и является прекрасным введением в общую теорию линейных представлений групп Ли. В то же время она будет полезна и для физиков-теоретиков, желающих углубить свои знания в области теории спиноров.

П. Широков

---

1) E. Cartan, *Leçons sur la théorie des spineurs* (Actualités scientifiques et industrielles, 643, 701), Paris, 1938.

2) E. Cartan, *Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane* (Bull. Soc. Math. de France, 41, 1913, стр. 53—96).

3) Хорошим пособием при изучении книги Картана может служить Бауэр, *Введение в теорию групп и ее приложения в квантовой физике*, ОНТИ, 1937.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

В квантовой механике физиками было введено понятие о спиноре. В наиболее общей математической форме спиноры были открыты автором этой книги в 1913 г. в связи с исследованием линейных представлений простых групп [1]). Спиноры дают линейное представление группы вращений пространства n измерений, причем каждый спинор определяется при помощи 2^ν, составляющих ($n = 2\nu + 1$ или 2ν). Спиноры четырехмерного пространства входят в знаменитые уравнения Дирака для электрона, причем четыре волновые функции являются не чем иным, как составляющими спинора. Было опубликовано очень много исследований по общей теории спиноров. Герман Вейль и Рихард Брауер недавно опубликовали прекрасный мемуар [2]), который можно рассматривать как основной, хотя многие из полученных результатов были очень кратко указаны в упомянутом выше исследовании. О. Веблен дал очень интересное исследование спиноров с другой точки зрения в неопубликованном курсе, прочитанном в Принстонском университете. Но почти во всех работах спиноры вводятся чисто формально, без интуитивной геометрической интерпретации, и это отсутствие геометрической природы спиноров сделало столь сложными попытки распространения на общую теорию относительности уравнений Дирака.

Одной из основных целей этой книги является систематическое развитие теории спиноров на основе чисто геометрического определения этих математических объектов. Благодаря этой геометрической основе матрицы, которыми пользуются в квантовой механике, возникают в ходе исследования сами

---

[1]) E. Cartan, *Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane* (Bull. Soc. Math. de France, 41, 1913, стр. 53—96).

[2]) R. Brauer, H. Weyl, *Spinors in n dimensions* (Amer. J. of Math., 57, 1935, стр. 425—449).

собой, и выясняется самая основа тех свойств, которыми обладают гиперкомплексные числа Клиффорда-Липшитца в теории представления вращений в пространстве любого числа измерений. Наконец, эта геометрическая основа делает очень простым введение спиноров в римановой геометрии и, в частности, применение к этим геометрическим объектам понятия параллельного переноса. Становятся понятными также и те затруднения, которые встретились в связи с последним вопросом и которые являются непреодолимыми, если пользоваться классическими приемами исследования в римановой геометрии. Эти приемы применимы к векторам и тензорам, которые помимо метрической природы имеют чисто аффинный характер, но они не могут применяться к спинорам, имеющим метрическую, но не аффинную природу.

Книга делится на две части. Первая посвящена общим вопросам теории групп вращений n-мерного пространства и линейных представлений групп, теории спиноров пространства трех измерений и исследованию линейных представлений группы вращений этого пространства. Эти представления, как известно, играют важную роль в квантовой механике. Для их определения использован метод бесконечно малых, который требует минимума предварительных сведений для своего понимания; трансцендентный метод Г. Вейля, основанный на теории характеров, оставлен в стороне, несмотря на его большой интерес.

Вторая часть посвящена теории спиноров в пространстве любого числа измерений и специально в пространстве частного принципа относительности; указаны линейные представления группы Лоренца, а также дана теория спиноров в римановой геометрии.

Эта книга, воспроизводящая с некоторыми изменениями курс, прочитанный в Сорбонне в зимнем семестре 1935/36 г., составлена по запискам, написанным А. Мерсье и использованным автором, который выражает ему свою глубокую благодарность за сотрудничество.

ЭЛИ КАРТАН.

ЧАСТЬ

I

СПИНОРЫ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ

ГЛАВА I

ЭВКЛИДОВО n-МЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО; ВРАЩЕНИЯ И ОТРАЖЕНИЯ

I. Пространство Эвклида

1. Определение. Векторы. Можно ввести понятие об эвклидовом n-мерном пространстве, называя точкой совокупность n чисел

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

причем квадрат расстояния от начальной точки $(0, 0, \ldots\ldots\ldots, 0)$ до точки (x) задается *фундаментальной формой*:

$$F \equiv x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2; \qquad (1)$$

эта форма дает также скалярный квадрат (квадрат длины) вектора $\vec{x}$, выходящего из начала и оканчивающегося в точке (x); n величин x_i называются также *составляющими* этого вектора. Координаты x_i могут быть произвольными комплексными числами, и тогда мы говорим о комплексном пространстве; но они могут быть также действительными, — и в этом случае мы имеем вещественное эвклидово пространство. В действительной области существуют также *псевдоэвклидовы* пространства, соответствующие *неопределенной* действительной фундаментальной форме:

$$F \equiv x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-h}^2 - x_{n-h+1}^2 - \ldots - x_n^2; \qquad (2)$$

не ограничивая общности исследования, мы будем предполагать $n - h \geqslant h$.

Мы будем рассматривать в вещественных пространствах векторы, составляющие которых не все являются вещественными; такие векторы будем называть мнимыми.

Вектор называется *изотропным*, если его длина равна нулю, то есть если его составляющие обращают в нуль фундаментальную форму. В комплексном пространстве или вещественном эвклидовом вектор называется единичным, если его длина равна 1. В вещественном псевдоэвклидовом пространстве с неопределенной фундаментальной формой мы будем различать вещественные *пространственные* векторы, составляющие которых дают положительное значение для фундаментальной формы, и вещественные *временные* векторы, составляющие которых дают отрицательное значение для этой формы. Единичный пространственный вектор дает для фундаментальной формы значение $+1$, единичный временной вектор — значение -1.

Рассмотрим два вектора $\vec{x}$, $\vec{y}$; скалярный квадрат вектора $\vec{x}+\lambda\vec{y}$ (где λ — некоторый параметр), имеющего составляющие $x_i+\lambda y_i$, равен

$$\vec{x}^2+\lambda^2\vec{y}^2+2\lambda\vec{x}\vec{y},$$

где через $\vec{x}\vec{y}$ обозначена сумма $x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$. Эта сумма называется *скалярным произведением* векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$. В случае псевдоэвклидова пространства скалярное произведение имеет следующий вид:

$$x_1y_1+\ldots+x_{n-h}y_{n-h}-x_{n-h+1}y_{n-h+1}-\ldots-x_ny_n.$$

Два вектора называются взаимно перпендикулярными, или ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю; изотропный вектор ортогонален сам себе. Геометрическое место векторов, ортогональных данному вектору, есть гиперплоскость $n-1$ измерений (определяемая одним линейным уравнением между координатами).

2. **Декартовы реперы.** n векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n$, имеющих составляющими соответственно $(1, 0, 0, \ldots\ldots 0)$, $(0, 1, 0 \ldots\ldots 0) \ldots\ldots$, $(0, 0, 0, \ldots\ldots\ldots, 1)$, образуют *базис* векторов в том смысле, что каждый вектор $\vec{x}$ является линейной комбинацией $x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n$ этих векторов. Векторы базиса попарно взаимно ортогональны; их совокупность мы будем называть *ортогональным декартовым репером.*

Возьмем теперь вообще n линейно независимых векторов $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \ldots, \vec{\eta}_n$, то есть таких, чтобы нельзя было подобрать n чисел $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n$ (не равных одновременно нулю) так, чтобы вектор $\lambda_1\vec{\eta}_1+\lambda_2\vec{\eta}_2+\ldots+\lambda_n\vec{\eta}_n$ был равен тождественно нулю. Каждый вектор $\vec{x}$ может быть единственным способом представлен в виде $u^1\vec{\eta}_1 + u^2\vec{\eta}_2 + \ldots + u^n\vec{\eta}_n$. Квадрат длины этого вектора равен

$$u^i u^j \vec{\eta}_i \vec{\eta}_j;$$

в этой формуле, следуя Эйнштейну, мы пропускаем знак суммы; индексы i, j принимают независимо друг от друга значения от 1 до n. Полагая

$$g_{ij} = g_{ji} = \vec{\eta}_i \vec{\eta}_j, \tag{3}$$

имеем для фундаментальной формы следующий вид:

$$\Phi \equiv g_{ij} u^i u^j. \tag{4}$$

Мы будем говорить, что совокупность векторов $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \ldots, \vec{\eta}_n$ образует базис, или *декартов репер*. В качестве векторов базиса будем выбирать векторы, имеющие общую начальную точку.

Исследуем обратный вопрос: можно ли заданную *a priori* квадратичную форму рассматривать как фундаментальную форму эвклидова пространства при соответствующем выборе репера? Мы будем предполагать, конечно, переменные и коэффициенты комплексными, если пространство комплексное, и действительными, если оно действительно. При решении этого вопроса мы применим одну классическую теорему из теории квадратичных форм.

3. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов.

Теорема. *Каждая квадратичная форма может быть приведена при помощи линейной подстановки к сумме квадратов.*

Доказательство, которое мы применяем, приложимо как в действительной, так и в комплексной области. Предположим сначала, что один из коэффициентов $g_{11}, g_{22}, \ldots, g_{nn}$ не равен нулю, например g_{11}. Рассмотрим форму

$$\Phi_1 \equiv \Phi - \frac{1}{g_{11}}(g_{11}u^1 + g_{12}u^2 + \ldots + g_{1n}u^n)^2;$$

она не содержит переменной u^1; полагая

$$y_1 = g_{11}u^1 + g_{12}u^2 + \ldots + g_{1n}u^n,$$

имеем

$$\Phi \equiv \frac{1}{g_{11}} y_1^2 + \Phi_1,$$

где Φ_1 — квадратичная форма от $n-1$ переменных $u^2, u^3, \ldots, u^n$. Предположим теперь, что все коэффициенты $g_{11}, g_{22}, \ldots, g_{nn}$ равны нулю, а один из остальных коэффициентов, например g_{12}, отличен от нуля. В этом случае рассмотрим форму

$$\Phi_2 \equiv \Phi - \frac{2}{g_{12}}(g_{21}u^1 + g_{23}u^3 + \ldots + g_{2n}u^n) \times$$
$$\times (g_{12}u^2 + g_{13}u^3 + \ldots + g_{1n}u^n);$$

она не содержит переменных u^1, u^2. Полагая

$$y_1 + y_2 = g_{21}u^1 + g_{23}u^3 + \ldots + g_{2n}u^n,$$
$$y_1 - y_2 = g_{12}u^2 + g_{13}u^3 + \ldots + g_{1n}u^n,$$

получаем

$$\Phi \equiv \frac{2}{g_{12}}(y_1^2 - y_2^2) + \Phi_2,$$

где Φ_2 — квадратичная форма от $n-2$ переменных u^3, u^4, $\ldots$, u^n. К Φ_1 и Φ_2 применяем тот же процесс и в конце концов представим Φ в виде суммы квадратов независимых линейных форм, причем каждый квадрат имеет определенный постоянный коэффициент. В вещественной области эти операции не вводят мнимых элементов.

Пусть

$$\Phi \equiv a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + \ldots + a_\nu y_\nu^2 \qquad (\nu \leqslant n).$$

Если в комплексной области мы примем $y_i\sqrt{a_i}$ за новые переменные, то приведем Φ к сумме квадратов. В вещественной области мы должны учитывать знаки коэффициентов a_i; принимая $y_i\sqrt{\pm a_i}$ за новые переменные, приводим Φ к виду:

$$\Phi \equiv y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_\nu^2.$$

4. Теорема инерции. *В вещественной области число положительных и число отрицательных квадратов не зависят от способа приведения квадратичной формы к каноническому виду.*

Предположим, что существует два разложения:

$$\Phi \equiv y_1^2 + \ldots + y_p^2 - z_1^2 - z_2^2 - \ldots - z_q^2,$$

$$\Phi \equiv v_1^2 + \ldots + v_{p'}^2 - w_1^2 - w_2^2 - \ldots - w_{q'}^2,$$

причем линейные формы y_i и z_i независимы, так же как и формы v_i и w_i. Предположим $p \neq p'$, например $p < p'$. Имеем тождество:

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_p^2 + w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_{q'}^2 \equiv$$
$$\equiv v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_{p'}^2 + z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_q^2.$$

Рассмотрим $p + q'$ линейных уравнений

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_p = w_1 = w_2 = \ldots = w_{q'} = 0;$$

так как $p + q' < p' + q' \leqslant n$, то эти уравнения имеют по крайней мере одно решение, при котором неизвестные u^1, $u^2, \ldots, u^n$ не равны все нулю; для этого решения

$$v_1 = v_2 = \ldots = v_{p'} = z_1 = z_2 = \ldots = z_q = 0;$$

таким образом, можно удовлетворить $p' + q'$ независимым уравнениям

$$v_1 = v_2 = \ldots = v_{p'} = w_1 = w_2 = \ldots w_{q'} = 0,$$

решая систему с меньшим числом $p + q'$ уравнений; мы приходим к противоречию. Следовательно, $p = p'$, $q = q'$.

Добавим, что, если данная форма Φ от $u^1, u^2, \ldots u^n$ *не является выродившейся*, т. е. если n форм $\frac{\partial \Phi}{\partial u^1}, \frac{\partial \Phi}{\partial u^2}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial u^n}$ независимы, так что *дискриминант* формы

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} g_{12} \cdots g_{1n} \\ g_{21} g_{22} \cdots g_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ g_{n1} g_{n2} \cdots g_{nn} \end{vmatrix} \tag{5}$$

отличен от нуля, то число $p + q$ независимых квадратов, получающихся в приведенной форме, равно n. В самом деле, в противном случае n частных производных $\frac{\partial \Phi}{\partial u^i}$, являющихся линейными комбинациями от $p+q<n$ форм $y_1, y_2, \ldots, y_p, z_1, z_2, \ldots, z_q$, не были бы независимыми.

5. Доказав приведенные выше теоремы, вернемся к нашей проблеме. Рассмотрим невыродившуюся квадратичную форму (4). В комплексной области существует n независимых линейных форм

$$x_i = a_{ik}u^k \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

причем

$$\Phi \equiv x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

Если в комплексном пространстве мы возьмем векторы $\vec{\eta}_k$ с составляющими $(a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk})$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, то эти n векторов независимы; вектор $u^k\vec{\eta}_k$ имеет i-й составляющей $x_i = a_{ik}u^k$, и его скалярный квадрат $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ равен данной квадратичной форме. Таким образом, соответствующим выбором векторов базиса, заданная фундаментальная форма пространства может быть приведена к произвольно заданной квадратичной форме $g_{ij}u^iu^j$.

В вещественной области имеем аналогичную картину, но квадратичная форма $g_{ij}u^iu^j$ должна быть: 1° невыродившейся, 2° приводимой к сумме $n-h$ положительных и h отрицательных квадратов, где h — данное целое число.

6. Контравариантные и ковариантные составляющие. Пусть пространство отнесено к некоторому декартову реперу,

$$\Phi \equiv g_{ij}u^iu^j$$

— его фундаментальная форма. Скалярный квадрат вектора $\vec{x}+\lambda\vec{y}$ равен

$$\Phi(x) + \lambda^2\Phi(y) + \lambda\left(y^i\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right);$$

отсюда вытекает, что скалярное произведение векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ равно

$$\frac{1}{2}y^i\frac{\partial\Phi}{\partial x^i} = g_{ij}x^iy^j;$$

если за $\vec{x}$ и $\vec{y}$ возьмем векторы $\vec{e}_i$, $\vec{e}_j$ базиса, то мы снова получим, между прочим, геометрическое значение (3) коэффициентов g_{ij}.

Ковариантными составляющими вектора $\vec{x}$ называются скалярные произведения $\vec{x}\,\vec{e}_1$, $\vec{x}\,\vec{e}_2, \ldots, \vec{x}\,\vec{e}_n$. Они обозначаются через $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Таким образом

$$x_i = \vec{x}\,\vec{e}_i = g_{ik}x^k; \quad \vec{x}\,\vec{y} = g_{ij}x^i y^j = x^i y_i = x_i y^i. \tag{6}$$

Обычные составляющие называются *контравариантными*. Формулы перехода от ковариантных составляющих к контравариантным получаются при решении уравнений (6):

$$x^i = g^{ik}x_k,$$

где через g^{ij} обозначены миноры элементов g_{ij} в дискриминанте g фундаментальной формы, деленные на g. В случае формы (1) получаем $x_i = x^i$

II. Вращения и отражения

7. Определение. Вращениями и отражениями *) (подразумевается: около начала) называются линейные преобразования координат, оставляющие инвариантной фундаментальную форму. Если такое преобразование переводит векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$ в $\vec{x}'$, $\vec{y}'$, то оно преобразует вектор $\vec{x} + \lambda\vec{y}$ в вектор $\vec{x}' + \lambda\vec{y}'$. Оно не меняет, конечно, длину вектора и скалярное произведение двух любых векторов. В вещественном псевдоэвклидовом пространстве оно преобразует пространственный вектор в пространственный, временно́й — во временно́й.

Определенная выше операция преобразует каждый ортогональный репер в ортогональный. Обратно, рассмотрим два

*) Термином „отражение" здесь переведено французское слово *retournement*, которым Картан обозначает ортогональное или псевдоортогональное преобразование с определителем, равным —1; эти преобразования иногда называют *несобственными вращениями* в отличие от *собственных вращений* (ортогональных или псевдоортогональных унимодулярных преобразований), которые Картан называет просто „вращениями". Термины „собственное и несобственное вращение (или отражение)" Картан вводит в дальнейшем, используя их для специальной классификации псевдоортогональных преобразований в псевдоэвклидовом пространстве. (*Прим. ред.*)

ортогональных репера $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ и $(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \ldots, \vec{\eta}_n)$, пусть $\vec{\eta}_i = a_i^k \vec{e}_k$. Отнесем пространство к первому из этих реперов и обозначим через x^i соответствующие. координаты. Линейное преобразование

$$(x^i)' = a_k^i x^k$$

переводит вектор $\vec{e}_i$ в вектор с составляющими $(a_i^1, a_i^2, \ldots a_i^n)$, то есть в вектор $\vec{\eta}_i$; это преобразование не меняет, с другой стороны, фундаментальную форму Φ, так как скалярный квадрат $\Phi(x')$ вектора $(x^i)' \vec{e}_i = a_k^i x^k \vec{e}_i = x^k \vec{\eta}_k$ равен $\Phi(x)$.

8. Докажем следующую теорему:

Теорема. *Определитель линейного преобразования, определяющего вращение или отражение, равен* $+1$ *или* -1.

Достаточно рассмотреть комплексную область, так как каждое вращение в вещественном эвклидовом пространстве является частным случаем вращений в комплексном пространстве.

Предположим сначала, что репер ортогональный; пусть

$$x_i' = a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

— уравнения преобразования. Из инвариантности фундаментальной формы имеем:

$$a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \ldots + a_{ni}^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$a_{1i} a_{1j} + a_{2i} a_{2j} + \ldots + a_{ni} a_{nj} = 0 \qquad (i \neq j).$$

Применяя правило умножения определителей к квадрату определителя преобразования, мы получим детерминант, у которого диагональные элементы равны единице, а все остальные нулю.

Если взять репер общего вида, что соответствует преобразованию координат

$$x_i = a_{ik} u^k,$$

и если линейной подстановке (8) соответствует в координатах u^i подстановка

$$(u^i)' = b_k^i u^k, \tag{9}$$

то

$$a_{ik} b_h^k u^h = a_{ik} a_{kh} u^h \qquad (i, h = 1, 2, \ldots, n).$$

Полагая

$$c_{ih} = a_{ik} b^k_h = a_{ik} a_{kh}$$

и обозначая через c, b, a, a определители, составленные соответственно из c_{ij}, b^j_i, a_{ij}, a_{ij}, получаем

$$c = ab = aa,$$

откуда $b = a = \pm 1$.

Мы будем называть *вращением* преобразование, определитель которого равен $+1$, *отражением* — преобразование с определителем, равным -1.

9. Симметрии. Будем называть симметрией относительно гиперплоскости Π, проходящей через начало, преобразование, которое ставит в соответствие точке x ей симметричную относительно Π, то есть точку x', получающуюся при помощи следующего построения: из x опускаем перпендикуляр на Π и продолжаем его на расстояние, равное длине этого перпендикуляра. Пусть в некотором декартовом репере уравнение плоскости имеет вид

$$a_i x^i = 0.$$

Вектор $\vec{x}'$ определяется из следующих условий:

1° вектор $\vec{x}' - \vec{x}$ ортогонален гиперплоскости Π;

2° вектор $\frac{1}{2}(\vec{x}' + \vec{x})$ лежит в гиперплоскости Π.

Так как уравнение гиперплоскости выражает тот факт, что вектор $\vec{x}$ ортогонален к вектору с ковариантными составляющими a_i, то имеем

$$(x^i)' - x^i = \lambda a^i \quad \text{или} \quad (x^i)' = x^i + \lambda a^i;$$

далее,

$$a_i (2x^i + \lambda a^i) = 0, \quad \text{то есть} \quad \lambda = -2 \frac{a_i x^i}{a_i a^i}.$$

Преобразование возможно, если $a_i a^i \neq 0$, то есть если перпендикуляр к гиперплоскости не является изотропной прямой; в этом случае получаем

$$(x^i)' = x^i - 2a^i \frac{a_k x^k}{a_k a^k};$$

очень просто проверяется инвариантность длины: $(x_i x^i)' = x_i x^i$.

Построенное выше преобразование мы будем называть *симметрией*; каждая симметрия задается гиперплоскостью или неизотропным вектором (который можно, в частности, считать единичным).

В случае вещественного пространства с неопределенной фундаментальной формой следует различать симметрии, определяемые вещественными пространственными векторами, и симметрии, относящиеся к вещественным временны́м векторам. Мы будем их называть соответственно *пространственными* и *временны́ми симметриями*.

Каждая симметрия есть отражение. Достаточно показать это при каком-нибудь частном выборе декартова ортогонального репера, например, когда первый вектор базиса определяет симметрию; тогда уравнения симметрии имеют вид

$$(u^1)' = -u^1,\ (u^2)' = u^2,\ \ldots,\ (u^n)' = u^n;$$

определитель этого преобразования равен -1.

10. Разложение вращения на произведение симметрий. Докажем следующую теорему, которая имеет место как в комплексной, так и в действительной области:

Каждое вращение является произведением четного числа $\leqslant n$ симметрий; каждое отражение является произведением нечетного числа $\leqslant n$ симметрий.

То, что четное число симметрий дает вращение, а нечетное — отражение, вытекает непосредственно из того, что симметрия есть отражение.

Теорема очевидна для $n = 1$; предположим, что она имеет место для пространств $1, 2, \ldots, n-1$ измерений, и докажем ее для пространства n измерений.

Теорема очевидна в том частном случае, когда существует неизотропный вектор, инвариантный при рассматриваемом вращении; в самом деле, принимая этот вектор за вектор $\vec{\eta}_1$ базиса и выбирая остальные $n-1$ векторов базиса в ортогональной гиперплоскости Π (она не содержит $\vec{\eta}_1$), мы приведем фундаментальную форму к виду

$$\Phi \equiv g_{11}(u^1)^2 + g_{ij}u^iu^j = g_{11}(u^1)^2 + \Psi,$$

где Ψ — неособенная форма от $n-1$ переменных. Так как рассматриваемое вращение (или отражение) оставляет инвариантной гиперплоскость Π, то оно определяется линейным преобразованием, не изменяющим координату u^1 и преобразующим между собой координаты $u^2, u^3, \ldots, u^n$ так, что форма Ψ остается инвариантной; оно полностью определяется, таким образом, вращением или отражением в гиперплоскости Π, т. е. в эвклидовом $(n-1)$-мерном пространстве; согласно сделанному предположению оно образовано из симметрий, соответствующих векторам, лежащим в Π, причем число этих симметрий не больше $n-1$.

Рассмотрим теперь общий случай; возьмем любой неизотропный вектор $\vec{a}$; пусть $\vec{a}'$ — преобразованный из него вектор. Если вектор $\vec{a}'-\vec{a}$ не изотропный, то симметрия, соответствующая ему, переводит $\vec{a}$ в $\vec{a}'$; рассматриваемое преобразование является, таким образом, произведением этой симметрии и другого преобразования, оставляющего инвариантным неизотропный вектор $\vec{a}$; она разлагается, следовательно, на некоторое число $\leqslant n$ симметрий.

Наше рассуждение неприменимо в том случае, если, каков бы ни был вектор $\vec{x}$, вектор $\vec{x}'-\vec{x}$ является изотропным ($\vec{x}'$ — вектор, преобразованный из $\vec{x}$). Исследуем этот случай. Векторы $\vec{x}'-\vec{x}$ образуют линейную совокупность, то есть если векторы $\vec{x}'-\vec{x}$ и $\vec{y}'-\vec{y}$ принадлежат ей, то ей принадлежит и вектор $\vec{x}'-\vec{x}+\lambda(\vec{y}'-\vec{y})$. Пусть p — число измерений этой совокупности, которую мы будем называть p-плоскостью. Возьмем в этой p-плоскости p векторов базиса $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \ldots, \vec{\eta}_p$; плоскость, перпендикулярная этим p векторам, определяется p линейными независимыми уравнениями; число измерений ее равно $n-p$, причем она содержит в себе каждый из векторов $\vec{\eta}_i$; в этой плоскости можно за векторы базиса принять $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \ldots \vec{\eta}_p$, и $n-2p$ других независимых векторов $\vec{\zeta}_1, \vec{\zeta}_2, \ldots, \vec{\zeta}_{n-2p}$. К построенным $n-p$ векторам прибавим p

новых векторов $\vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2, \ldots, \vec{\vartheta}_p$ таким образом, чтобы получился базис для полного пространства.

Заметим, что, каковы бы ни были векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$,

$$\vec{x}' - \vec{x} = a^i\vec{\eta}_i, \qquad \vec{y}' - \vec{y} = b^k\vec{\eta}_k;$$

выражая равенство скалярных произведений $\vec{x}'\vec{y}'$ и $\vec{x}\vec{y}$, получаем

$$\vec{x}b^k\vec{\eta}_k = -\vec{y}a^k\vec{\eta}_k.$$

Выберем в качестве $\vec{y}$ какой-нибудь из векторов $\vec{\eta}_i$ и $\vec{\zeta}_i$. Правая часть равенства обращается в нуль; следовательно, вектор $b^k\vec{\eta}_k$ ортогонален любому вектору $\vec{x}$. Это возможно только в том случае, если вектор $b^k\vec{\eta}_k$ равен нулю. Отсюда вытекает, что векторы $\vec{\eta}_i$ и $\vec{\zeta}_i$ инвариантны при рассматриваемой операции (вращении или отражении).

Образуем теперь фундаментальную форму пространства; обозначая через $u^i\vec{\eta}_i + v^j\vec{\zeta}_j + w^k\vec{\vartheta}_k$ произвольный вектор, имеем:

$$\Phi \equiv u^iw^k\vec{\eta}_i\vec{\vartheta}_k + v^jv^k\vec{\zeta}_j\vec{\zeta}_k + v^jw^k\vec{\zeta}_j\vec{\vartheta}_k + w^jw^k\vec{\vartheta}_j\vec{\vartheta}_k.$$

Эта форма не вырождившаяся, то есть коэффициенты при $u^1, u^2, \ldots, u^p$ являются независимыми линейными формами от $w^1, w^2, \ldots, w^p$; таким образом, можно выбрать векторы базиса так, чтобы

$$\vec{\eta}_i\vec{\vartheta}_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Затем можно добиться того, чтобы производные $\frac{\partial\Phi}{\partial w}$, равные u^i плюс линейная комбинация переменных v^j и w^k, были равны u^i; для этого следует только изменить каждый вектор $\vec{\zeta}_j$, $\vec{\vartheta}_k$ прибавлением линейной комбинации векторов $\vec{\eta}_i$. Получаем

$$\Phi \equiv \sum u^iw^i + \gamma_{jk}v^jv^k,$$

причем вторая сумма в правой части определяет невырождившуюся форму. Так как $\vec{\zeta}_j$ инвариантны при рассматриваемом преобразовании (вращении или отражении), то мы приходим при $n > 2p$ к частному случаю, когда существует инвариантный неизотропный вектор, и теорема, таким образом, доказана. Остается случай $n = 2p$. Имеем:

$$\vec{\eta}_i' = \vec{\eta}_i, \qquad \vec{\vartheta}_i' = \vec{\vartheta}_i + \beta_{ik}\vec{\eta}_k;$$

соотношения $\vec{\eta}_i\vec{\vartheta}_i = 1$, $\vec{\eta}_i\vec{\vartheta}_j = 0$ $(i \neq j)$ приводят нас, если выразить инвариантность скалярных произведений $\vec{\vartheta}_i\vec{\vartheta}_j$, к равенству:

$$\beta_{ij} + \beta_{ji} = 0.$$

Можно еще упростить предыдущие формулы. В самом деле, результат преобразования произвольной линейной комбинации $w^k\vec{\vartheta}_k$ векторов $\vec{\vartheta}_k$ выражается следующим образом:

$$w^k\vec{\vartheta}_k' = w^k\vec{\vartheta}_k + w^k\beta_{kh}\vec{\eta}_h.$$

Но сумма $w^k\beta_{kh}\vec{\eta}_h$ остается инвариантной при любой замене базиса $\vec{\eta}_i$, сопровождаемой коррелятивным преобразованием в базисе $\vec{\vartheta}_k$; $\vec{\eta}_i$ и w_i преобразуются одинаковым образом (инвариантность $\Sigma u^i w^i$ и $\Sigma u^i\vec{\eta}_i$). С другой стороны, известно, что знакопеременная билинейная форма путем применения одного и того же линейного преобразования к обоим рядам переменных может быть приведена к каноническому виду:

$$w^1\vec{\eta}_2 - w^2\vec{\eta}_1 + w^3\vec{\eta}_4 - w^4\vec{\eta}_3 + \ldots + w^{2q-1}\vec{\eta}_{2q} - w^{2q}\vec{\eta}_{2q-1}.$$

Таким образом, при соответствующем изменении базиса мы имеем следующие формулы преобразования:

$$\vec{\vartheta}_1' = \vec{\vartheta}_1 + \vec{\eta}_2, \;\ldots,\; \vec{\vartheta}_{2q-1}' = \vec{\vartheta}_{2q-1} + \vec{\eta}_{2q},$$
$$\vec{\vartheta}_2' = \vec{\vartheta}_2 - \vec{\eta}_1, \;\ldots,\; \vec{\vartheta}_{2q}' = \vec{\vartheta}_{2q} - \vec{\eta}_{2q-1}.$$

Между прочим, p должно быть обязательно равно $2q$, так как в противном случае неизотропный вектор $\vec{\vartheta}_p + \vec{\eta}_p$ был бы инвариантным. Каждое из 4-мерных пространств с невыродившейся фундаментальной формой, определяемых векторами $(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \vec{\vartheta}_1, \vec{\vartheta}_2)$, $(\vec{\eta}_3, \vec{\eta}_4, \vec{\vartheta}_3, \vec{\vartheta}_4)$ и т. д., инвариантно при рассматриваемом преобразовании. Таким образом, достаточно доказать, что это преобразование может быть выполнено в каждом из этих пространств при помощи не более 4 симметрий. Рассмотрим первое пространство с фундаментальной формой $u^1w^1 + u^2w^2$. Вращение (или отражение) выражается следующим образом:

$$(u^1)' = u^1 + w^2, \quad (u^2)' = u^2 - w^1, \quad (w^1)' = w^1, \quad (w^2)' = w^2;$$

так как определитель равен $+1$, то это есть вращение. Нетрудно видеть, что оно может быть получено в результате последовательного применения симметрий, соответствующих четырем неизотропным векторам

$$\vec{\eta}_2 + \vec{\vartheta}_2, \quad a\vec{\eta}_2 + \vec{\vartheta}_2, \quad \vec{\eta}_1 + a\vec{\eta}_2 + \left(1 - \frac{1}{a}\right)\vec{\vartheta}_2,$$
$$\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 + \left(1 - \frac{1}{a}\right)\vec{\vartheta}_2,$$

где a — коэффициент, отличный от 0 и 1. Теорема доказана.

В вещественных пространствах это доказательство вводит только вещественные векторы при условии, что a берется вещественным.

11. Непрерывность группы вращений. Докажем, что в комплексном пространстве и вещественном с определенной фундаментальной формой группа[1] вращений непрерывна. Это означает, что каждое вращение может быть связано с тождественным преобразованием при помощи непрерывной последовательности вращений. Достаточно доказать эту теорему для

---

[1]) Говоря, что вращения образуют группу, мы выражаем следующие два свойства совокупности этих преобразований: 1° произведение двух вращений есть вращение, 2° каждому вращению соответствует обратное вращение.

вращения, являющегося результатом применения двух симметрий. Пусть эти симметрии определяются двумя единичными векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$; если $n \geqslant 3$, можно найти по крайней мере один единичный вектор $\vec{c}$, ортогональный к $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Рассмотрим непрерывную последовательность вращений, определяемых симметриями, которые соответствуют единичным векторам

$$\vec{a}' = \vec{a} \cos t + \vec{c} \sin t, \qquad \vec{b}' = \vec{b} \cos t + \vec{c} \sin t,$$

где t обозначает вещественный параметр, изменяющийся от 0 до $\frac{\pi}{2}$; при $t = 0$ получаем данное вращение, при $t = \frac{\pi}{2}$ — вращение, являющееся результатом двукратного применения одной и той же симметрии (соответствующей вектору $\vec{c}$), то есть тождественное преобразование; итак доказана

Теорема. *В комплексном эвклидовом пространстве и в вещественном эвклидовом пространстве с определенной фундаментальной формой вращения (вещественные во втором случае) образуют непрерывную группу.*

12. Собственные и несобственные вращения. Покажем, что в вещественном псевдоэвклидовом пространстве (с неопределенной фундаментальной формой) группа вращений не непрерывна, а разлагается на два различных непрерывных семейства, которые мы назовем семейством *собственных вращений* и семейством *несобственных вращений.*

Лемма I. *Два пространственных единичных вектора могут быть всегда соединены непрерывной последовательностью пространственных единичных векторов.*

Примем за фундаментальную форму

$$F \equiv x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-h}^2 - x_{n-h+1}^2 - \ldots - x_n^2.$$

Вещественный пространственный вектор определяется при помощи n вещественных чисел, из которых $n - h$ первых могут быть рассматриваемы как составляющие вектора $\vec{u}$ в вещественном эвклидовом пространстве E_{n-h}, h остальных — как составляющие вектора $\vec{v}$ в вещественном эвклидовом пространстве E_h. Если вектор $\vec{x}$ единичный, то $\vec{u}^2-\vec{v}^2=1$, то есть можно положить

$$\vec{u}=\vec{a}\,\mathrm{ch}\,\alpha, \qquad \vec{v}=\vec{b}\,\mathrm{sh}\,\alpha,$$

где α — вещественное число, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — единичные векторы пространств E_{n-h} и E_h. Любой другой пространственный вектор $\vec{x}$ может быть определен вещественным числом α' и двумя единичными вещественными векторами $\vec{a}'$ и $\vec{b}'$. Можно непрерывным образом перейти от $\vec{x}$ к $\vec{x}'$:

1° оставляя $\vec{a}$, $\vec{b}$ неизменными и изменяя α непрерывно до значения α';

2° оставляя $\vec{b}$ неизменным и соединяя в E_{n-h} векторы $\vec{a}$ и $\vec{a}'$ непрерывной последовательностью вещественных единичных векторов;

3° оставляя $\vec{a}'$ неизменным и соединяя в E_h векторы $\vec{b}$ и $\vec{b}'$ непрерывной последовательностью вещественных единичных векторов.

Лемма применима и к двум единичным временны́м векторам *).

Лемма II. *Вращение, получающееся в результате применения двух пространственных (или временны́х) симметрий, может быть соединено с тождественным вращением при помощи непрерывной последовательности вращений.*

Пусть вращение является произведением двух симметрий, соответствующих двум единичным пространственным векторам $\vec{u}$ и $\vec{v}$, и пусть $\vec{w}_t$ — непрерывная последовательность еди-

---

*) Лемма I справедлива по отношению к пространственным векторам при условии $n=2$ и по отношению к временны́м при условии $h=1$; при доказательстве леммы эти условия используются соответственно в пунктах 2° и 3°. В общем случае, если $\vec{a}$, $\vec{b}$ единичные пространственные (временны́е) векторы, то $\vec{a}$ может быть соединен непрерывной последовательностью единичных пространственных (временны́х) векторов или с $\vec{b}$ или с $-\vec{b}$. (*Прим. ред.*)

ничных пространственных векторов, соединяющая $\vec{u}$ с $\vec{v}$*); вращение, получающееся в результате применения симметрий, определяемых векторами $\vec{w}_t$ и $\vec{v}$, соединяет непрерывным образом рассматриваемое вращение с тождественным.

Лемма III. *При каждом вращении (или отражении) функциональный определитель, составленный из производных от $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-h}$ по $x_1, x_2, \ldots, x_{n-h}$, отличен от нуля.*

Предположим противное: пусть существуют значения $a_1, a_2, \ldots, a_{n-h}$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-h}$, не равные одновременно нулю и превращающие в нуль в формулах, выражающих $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-h}$ через $x_1, x_2, \ldots, x_n$, совокупность членов, зависящих от $x_1, x_2, \ldots, x_{n-h}$. У вектора, получающегося при преобразовании из пространственного вектора $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-h}, 0, \ldots, 0)$, первые $n-h$ составляющих $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-h}$ равны нулю; мы получаем, таким образом, временной вектор, что невозможно.

Обратимся теперь к доказательству теоремы. Заметим прежде всего, что на основании леммы III, если два вращения могут быть соединены непрерывной последовательностью вращений, то эти два вращения дают один и тот же знак функциональному определителю Δ, образованному из производных от $x'_1, \ldots, x'_{n-h}$ по $x_1, \ldots, x_{n-h}$, так как при переходе от одного вращения к другому этот определитель изменяется непрерывно и не обращается в нуль. На основании леммы II вращения, являющиеся произведениями четного числа пространственных отражений и четного числа временных, дают определителю Δ тот же знак, что и тождественное вращение, то есть плюс. Наоборот, вращение, являющееся произведением пространственной симметрии и временной, может быть на основании леммы I соединено непрерывной последовательностью вращений с вращением, являющимся результатом применения симметрий, определяемых векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_n$; оно дает, таким образом, определителю Δ

*) Такая последовательность всегда существует, так как векторы $\vec{u}, \vec{v}$ определены только с точностью до знака (см. предыдущее примечание). (*Прим. ред.*)

тот же знак, что и это последнее вращение, то есть минус. Результирующее вращение нечетного числа пространственных симметрий и нечетного числа временных может быть приведено к последнему вращению при помощи непрерывной последовательности вращений. Таким образом, доказана

Теорема. *В вещественном псевдоэвклидовом пространстве группа вращений разлагается на 2 различных семейства; первое образовано группой собственных вращений, получающихся в результате применения четного числа пространственных симметрий и четного числа временных; второе семейство является совокупностью несобственных вращений, состоящих из нечетного числа пространственных симметрий и нечетного числа временных; эта совокупность не образует группы.*

Собственные и несобственные вращения различаются знаком функционального определителя, составленного из производных от $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-h}$ по $x_1, x_2, \ldots, x_{n-h}$ или знаком функционального определителя

$$\frac{\partial(x'_{n-h+1}, \ldots, x'_n)}{\partial(x_{n-h+1}, \ldots, x_n)}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать так называемые *собственные отражения*, являющиеся результатом применения нечетного числа пространственных симметрий и четного числа временных. Они характеризуются тем, что функциональный определитель

$$\frac{\partial(x'_{n-h+1}, \ldots, x'_n)}{\partial(x_{n-h+1} \ldots, x_n)}$$

положителен (*инвариантность временной ориентации*).

13. Пространства, у которых $h=1$. В этих пространствах каждое собственное вращение и собственное отражение является произведением пространственных симметрий. В самом деле, пусть $\vec{x}$ — единичный временной вектор, $\vec{x}'$ — вектор, получающийся из него при преобразовании; мы можем выбрать $\vec{x}$ за вектор $\vec{e}_n$ базиса; так как коэффициент при x_n

в x'_n положителен, то составляющая x'_n вектора $\vec{x}'$ положительна и больше 1, то есть скалярное произведение $\vec{x}\vec{x}'$ меньше -1. Скалярный квадрат вектора $\vec{x}'-\vec{x}$ равен $-2\vec{x}\vec{x}'-2>0$, то есть $\vec{x}'-\vec{x}$ — пространственный вектор. Таким образом, можно перейти от вектора $\vec{x}$ к $\vec{x}'$ при помощи пространственной симметрии и, чтобы получить рассматриваемое вращение (или отражение), достаточно иметь дело с вещественным эвклидовым пространством с определенной фундаментальной формой, ортогональным к $\vec{x}'$, а это даст самое большее $n-1$ пространственных симметрий.

Теорема. *В пространстве, фундаментальная форма которого приводится к сумме $n-1$ положительных квадратов и одного отрицательного, каждое собственное вращение и собственное отражение является произведением некоторого числа $\leqslant n$ пространственных симметрий.*

III. Мультивекторы

14. Объем гиперпараллелепипеда, построенного на n векторах. Пусть в эвклидовом пространстве E_n, отнесенном к некоторому декартову реперу, заданы n векторов в определенном порядке $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \ldots, \vec{t}$; рассмотрим определитель, образованный из составляющих этих векторов,

$$\Delta=\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & \ldots & x^n \\ y^1 & y^2 & \ldots & y^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t^1 & t^2 & \ldots & t^n \end{vmatrix};$$

так как вращение определяется линейным преобразованием с определителем, равным $+1$, а отражение — линейным преобразованием с определителем, равным -1, то Δ не изменяет абсолютной величины при применении к векторам пространства одного и того же вращения или отражения. Можно составить определитель Δ' из ковариантных составляющих векторов; Δ' равен произведению Δ на определитель линейной подстановки, преобразующей контравариантные составляющие в ковариантные, то есть на g.

С другой стороны, вычислив произведение

$$\Delta\Delta' = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & \dots & x^n \\ y^1 & y^2 & \dots & y^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t^1 & t^2 & \dots & t^n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{vmatrix},$$

получим

$$\Delta\Delta' = \begin{vmatrix} \vec{x}^2 & \vec{x}\vec{y} & \dots & \vec{x}\vec{t} \\ \vec{y}\vec{x} & \vec{y}^2 & \dots & \vec{y}\vec{t} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vec{t}\vec{x} & \vec{t}\vec{y} & \dots & \vec{t}^2 \end{vmatrix},$$

причем в этот определитель *) входят только скалярные произведения заданных векторов. При $n=3$ этот определитель равен квадрату объёма параллелепипеда, построенного на 3 векторах. Естественно назвать объемом гиперпараллелепипеда, построенного на n векторах x, y, ..., t, квадратный корень из этого определителя при любом n. Таким образом

$$V^2 = \Delta\Delta' = g\Delta^2,$$

откуда

$$V = \sqrt{g}\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}}\Delta'.$$

Если вещественное пространство — псевдоэвклидово, то удобнее положить

$$V = \sqrt{|g|}\Delta = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\Delta';$$

знак у Δ дает ориентацию n-эдра, построенного на n векторах; если $\Delta > 0$, то эта ориентация та же, что и у декартова репера.

---

*) Этот определитель называется определителем Грамма векторов x, y, ..., t. (*Прим. ред.*)

15. Мультивекторы. Рассмотрим теперь систему p векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$, ..., $\vec{z}$, заданных в определенном порядке. Будем говорить, что они определяют p-вектор: условимся считать два p-вектора равными, если плоское p-мерное многообразие, содержащее данные p-векторы, одно и то же для обоих p-векторов и если объем параллелепипеда, построенного на векторах каждой системы, один и тот же и с одинаковой ориентацией. Покажем, что p-вектор однозначно определяется минорами p-го порядка матрицы, составленной из контравариантных (или ковариантных) составляющих этих векторов.

В самом деле, пусть $\vec{t}$ — переменный вектор; для того чтобы этот вектор лежал в p-мерной плоскости, определяемой заданными векторами, необходимо и достаточно, чтобы миноры $(p+1)$-го порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & \ldots & x^n \\ y^1 & y^2 & \ldots & y^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z^1 & z^2 & \ldots & z^n \\ t^1 & t^2 & \ldots & t^n \end{pmatrix}$$

были равны нулю. Обозначая через $P^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ минор, построенный из элементов p первых строк и i_1-го, i_2-го, ..., i_p-го столбцов, мы получаем уравнения

$$t^{i_1}P^{i_2 i_3 \ldots i_{p+1}} - t^{i_2}P^{i_1 i_3 \ldots i_{p+1}} + \ldots + (-1)^p t^{i_{p+1}}P^{i_1 i_2 \ldots i_p} = 0.$$

Для того чтобы два p-вектора с составляющими P и Q лежали в одной и той же p-плоскости, необходимо и достаточно, чтобы их составляющие были пропорциональны.

Предположим, что это условие выполнено: $Q^{i_1 i_2 \ldots i_p} = \lambda P^{i_1 i_2 \ldots i_p}$; алгебраическое отношение двух p-векторов сохраняется при проектировании; оно равно постоянному отношению их составляющих, которые дают объемы их проекций на различные координатные p-плоскости.

Отметим, наконец, что квадрат V^2 меры*) p-вектора равен

$$\frac{1}{p!} P_{i_1 i_2 \ldots i_p} P^{i_1 i_2 \ldots i_p},$$

*) *Мерой* (или объемом) p-вектора, определяемого векторами $\vec{x}$, $\vec{y}$, ..., $\vec{z}$, называется объем параллелепипеда, построенного на этих векторах. (*Прим. ред.*)

где $P_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ обозначают ковариантные составляющие (миноры, построенные из ковариантных составляющих p-векторов). В самом деле (п. 14),

$$V^2 = \begin{vmatrix} \vec{x}^2 & \vec{x}\vec{y} & \ldots & \vec{x}\vec{z} \\ \vec{y}\vec{x} & \vec{y}^2 & \ldots & \vec{y}\vec{z} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vec{z}\vec{x} & \vec{z}\vec{y} & \ldots & \vec{z}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^i x_i & x^j y_j & \ldots & x^k z_k \\ y^i x_i & y^j y_j & \ldots & y^k z_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z^i x_i & z^j y_j & \ldots & z^k z_k \end{vmatrix} =$$

$$= x_i y_j \ldots z_k \begin{vmatrix} x^i & x^j & \ldots & x^k \\ y^i & y^j & \ldots & y^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z^i & z^j & \ldots & z^k \end{vmatrix} = \frac{1}{p!} P_{ij \ldots k} P^{ij \ldots k}$$

причем сумма распространяется на все сочетания из n индексов $1, 2, \ldots, n$ по p.

Совокупность n векторов может быть названа n-вектором; она имеет только одну контравариантную и ковариантную составляющую. Каждая из этих составляющих меняет знак при отражении.

16. Изотропные мультивекторы. p-вектор называется изотропным, если его мера равна нулю, причем его составляющие не равны все нулю, то есть он не лежит в плоскости с числом измерений $< p$. p-вектор является изотропным тогда и только тогда, если в его p-плоскости существует вектор, перпендикулярный ко всем векторам этой плоскости. В самом деле, если мера p-вектора равна нулю, можно найти p постоянных $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$, не равных одновременно нулю и удовлетворяющих уравнениям:

$$\begin{gathered} \alpha\vec{x}^2 + \beta\vec{y}\vec{x} + \ldots + \gamma\vec{z}\vec{x} = 0, \\ \alpha\vec{x}\vec{y} + \beta\vec{y}^2 + \ldots + \gamma\vec{z}\vec{y} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha\vec{x}\vec{z} + \beta\vec{y}\vec{z} + \ldots + \gamma\vec{z}^2 = 0; \end{gathered}$$

отсюда вытекает, что существует ненулевой вектор $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \ldots + \gamma\vec{z}$ ортогональный p векторам $\vec{x}, \vec{y}, \ldots, \vec{z}$. Справедливо и обратное предположение. Можно также сказать, что p-плоскость p-вектора касательна к изотропному конусу (геометрическому месту изотропных прямых) вдоль прямой, на которой лежит вектор $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}+\ldots+\gamma\vec{z}$.

17. Дополнительные мультивекторы. Рассмотрим неизотропный вектор; будем говорить, что $(n-p)$-вектор является дополнительным к этому p-вектору, если плоскость первого является геометрическим местом прямых, перпендикулярных к p-плоскости данного p-вектора, если мера $(n-p)$-вектора равна мере p-вектора и если, наконец, n-эдр, образованный из p векторов данного p-вектора и $n-p$ векторов $(n-p)$-вектора, имеет положительную ориентацию. Заметим, что $(n-p)$-плоскость искомого $(n-p)$-вектора вполне определена и не имеет общих направлений с p-плоскостью данного p-вектора (в противном случае этот последний был бы изотропным).

Предположим, что $P^{12\ldots p}\neq 0$. Уравнения, выражающие условие, что некоторый вектор $\vec{t}$ перпендикулярен к p векторам $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\ldots$, $\vec{z}$, имеют вид:

$$t_i x^i = 0, \qquad t_i y^i = 0, \qquad \ldots, \quad t_i z^i = 0;$$

исключая t_2, t_3, $\ldots$, t_p, получаем соотношение

$$t_1 P^{12\ldots p} + t_{p+1} P^{(p+1)2\ldots p} + \ldots + t_n P^{n23\ldots p} = 0;$$

аналогично получаем:

$$t_2 P^{213\ldots p} + t_{p+1} P^{(p+1)13\ldots p} + \ldots + t_n P^{n13\ldots p} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$t_p P^{p12\ldots(p-1)} + t_{p+1} P^{(p+1)12\ldots(p-1)} + \ldots + t_n P^{n12\ldots(p-1)} = 0.$$

Таковы уравнения $(n-p)$-плоскости искомого дополнительного $(n-p)$-вектора. С другой стороны, если обозначить через $Q_{i_1 i_2\ldots i_{n-p}}$ ковариантные составляющие этого $(n-p)$-вектора, уравнения его $(n-p)$-плоскости имеют вид:

$$t_{i_1} Q_{i_2 i_3\ldots i_{n-p+1}} - t_{i_2} Q_{i_1 i_3\ldots i_{n-p+1}} + \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-p} t_{i_{n-p+1}} Q_{i_1 i_2\ldots i_{n-p}} = 0;$$

принимая последовательно за $i_1, i_2, \ldots, i_{n-p+1}$ комбинации $(1, p+1, p+2, \ldots, n)$, $(2, p+1, p+2, \ldots, n)$ и т. д. отождествляя с ранее полученными уравнениями $(n-p)$-плоскости, мы видим, что между $P^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ и $Q_{i_{p+1} i_{p+2} \ldots i_n}$ существует пропорциональность, причем предполагается, что перестановка $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ четная. Таким образом, можно положить

$$P^{i_1 i_2 \ldots i_p} = \lambda Q_{i_{p+1} i_{p+2} \ldots i_n},$$

$$P_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \mu Q^{i_{p+1} i_{p+2} \ldots i_n}.$$

Записав, что p-вектор и дополнительный $(n-p)$-вектор имеют одинаковый объем, имеем $\lambda\mu = 1$. С другой стороны, n-вектор, образованный из векторов p-вектора и $(n-p)$-вектора, имеет меру, равную

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \sum P_{i_1 i_2 \ldots i_p} Q_{i_{p+1} \ldots i_n} = \frac{1}{\lambda \sqrt{g}} \sum P_{i_1 i_2 \ldots i_p} P^{i_1 i_2 \ldots i_p},$$

где сумма распространяется на все сочетания $i_1 i_2 \ldots i_p$ по p индексов. Эта мера равна квадрату меры p-вектора, поэтому $\lambda = \frac{1}{\sqrt{g}}$, $\mu = \sqrt{g}$, откуда следуют формулы:

$$\left.\begin{aligned} P^{i_1 i_2 \ldots i_p} &= \frac{1}{\sqrt{g}} Q_{i_{p+1} i_{p+2} \ldots i_n}, \\ P_{i_1 i_2 \ldots i_p} &= \sqrt{g}\, Q^{i_{p+1} i_{p+2} \ldots i_n}. \end{aligned}\right\}$$

Примечание. При определении $(n-p)$-вектора, дополнительного к данному p-вектору, мы предполагали, что этот последний неизотропен; однако, полученные формулы имеют общее значение и позволяют распространить определение на все возможные случаи; может случиться, что p-вектор равен своему дополнительному (конечно, если $n = 2p$).

18. Сумма p-векторов. Рассмотрим некоторую систему p-векторов. Условимся считать равными две такие системы, если суммы составляющих с одинаковыми индексами p-векторов, входящих в каждую систему, одинаковы для обеих этих совокупностей *). Обозначая эти суммы так же, как и составляющие p-вектора, мы получим то, что называется составляющими системы. Условливаются и в этом случае говорить, что эти C_n^p составляющих определяют p-вектор; введенные раньше p-векторы называются *простыми*. Можно определить дополнение к непростому p-вектору при помощи тех же самых формул, что и для простого p-вектора. Аналитически p-вектор в обобщенном смысле может быть определен как совокупность C_n^p чисел $P^{i_1 i_2 \ldots i_p}$, имеющих p различных *антисимметрических* индексов, то есть таких индексов, при перестановке которых составляющая или вовсе не меняется, или меняет знак в зависимости от того, четной или нечетной является перестановка.

IV. Бивекторы и бесконечно малые вращения

Бивектор определяется при помощи $\frac{n(n-1)}{2}$ величин $a^{ij} = -a^{ji}$; бивектор тогда и только тогда является простым, если его составляющие удовлетворяют соотношениям

$$a^{ij}a^{kh} + a^{jk}a^{ih} + a^{ki}a^{jh} = 0 \quad (i, j, k, h = 1, 2, \ldots, n).$$

19. Бесконечно малые вращения. Мы приходим к бивекторам, изучая совокупность вращений, зависящую от одного параметра.

Пусть пространство отнесено к декартову реперу

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n).$$

Скорость точки $\vec{x}$ пространства в некоторый момент t имеет составляющими линейные формы от координат; в самом деле, пусть

$$(x^i)' = a_k^i(t)\, x^k$$

— уравнения движения, где x^k обозначают координаты движущейся точки в начальный момент t_0. Предположим, что функ-

*) Картан пользуется здесь аналогией с понятием эквивалентности двух систем векторов, приложенных к некоторой точке. Две системы считаются эквивалентными (равными), если равны их главные векторы, являющиеся суммами векторов каждой системы. Аналогично этому Картан вводит понятие о равных системах мультивекторов. (*Прим ред.*)

ции $a^i_k(t)$ дифференцируемы; скорость точки, имевшей в начальный момент положение (x), определяется составляющими

$$v^i = \frac{da^i_k(t)}{dt} x^k;$$

но x^k суть линейные однородные функции координат $(x^i)'$ движущейся точки в момент t; таким образом, v^i являются линейными функциями этих координат.

Изменяя несколько обозначения, имеем

$$v^i = a^i_k x^k;$$

эти формулы дают скорость в момент t точки, имеющей координаты x^i в этот момент. Скорость должна быть перпендикулярна к вектору с началом O и концом x; следовательно,

$$x_i v^i \equiv a^i_k x_i x^k \equiv a_{ik} x^i x^k = 0;$$

отсюда $a_{ij} + a_{ji} = 0$; a^i_k суть *смешанные* составляющие бивектора.

Бесконечно малым вращением называется переменное вращение, совершающееся в бесконечно малый интервал времени $(t,\ t + dt)$; оно дает каждой точке x элементарное перемещение, равное $\delta\vec{x} = \vec{v}dt$, где $\vec{v}$ — скорость в момент t.

Каждое бесконечно малое вращение определяется, следовательно, формулами:

$$\delta x^i = a^i_k x^k dt, \tag{11}$$

где a^i_k — смешанные составляющие бивектора. Бесконечно малые вращения зависят линейно от $\frac{n(n-1)}{2}$ параметров.

ГЛАВА II

ТЕНЗОРЫ; ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП; МАТРИЦЫ

I. Определение тензоров

20. Первый пример линейного представления. Выше мы рассматривали линейные преобразования S, определяющие вращение $\mathfrak{R}$ вектора $\vec{x}$ эвклидова пространства E_n, отнесенного к некоторому неподвижному декартову реперу $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$. Эти линейные преобразования имеют следующее очевидное свойство: если преобразования S и S' соответствуют вращениям $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$, преобразование, соответствующее вращению $\mathfrak{R}'\mathfrak{R}$ (получающемуся в результате последовательного применения $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$), является произведением $S'S$ подстановок S и S'. Мы будем говорить, что совокупность преобразований S образует *линейное представление* группы вращений.

Если ввести новый репер, который не может быть получен из старого при помощи вращения или отражения, то вращение $\mathfrak{R}$, определявшееся подстановкой S, выразится при помощи нового линейного преобразования T. Совокупность преобразований T дает новое линейное представление группы вращений. Очевидно, что существует тесная зависимость между этими двумя представлениями, которые аналитически выражают одни и те же геометрические операции над одними и теми же геометрическими объектами. Эта зависимость заключается в следующем: если x^i суть составляющие вектора в первом репере, y^i — составляющие того же вектора во втором, то зависимость между x^i и y^i выражается некоторой линейной подстановкой σ; преобразование T получается из соответствующего преобразования S, если над переменными x^i и $(x^i)'$ выполнить одну и ту же линейную подстановку, именно, ту, которая преобразует x^i в y^i. Таким образом, мы переходим

от y^i	к x^i	при помощи подстановки	σ^{-1};
„ x^i	к $(x^i)'$	„ „ „	S;
„ $(x^i)'$	к $(y^i)'$	„ „ „	σ;

следовательно, переход от y^i к $(y^i)'$ происходит при помощи преобразований σ^{-1}, S, σ, а это записывается при помощи следующей формулы

$$T = \sigma S \sigma^{-1}.$$

Мы будем говорить, что линейное представление T группы вращений *эквивалентно* линейному представлению S, причем эта эквивалентность выражается в том, что существует определенное линейное преобразование σ, при помощи которого каждой подстановке S первого представления соответствует преобразование $\sigma S' \sigma^{-1}$ второго.

21. Общее определение линейных представлений группы вращений. Возьмем два вектора (x^i) и (y^i), отнесенных к одному и тому же декартову реперу, и образуем n^2 произведений $x^i y^j$; при вращении эти произведения подвергаются линейной подстановке Σ, причем эта последняя обладает тем свойством, что, если Σ и Σ' соответствуют вращениям $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$, то преобразование $\Sigma'\Sigma$ соответствует $\mathfrak{R}'\mathfrak{R} \cdot n^2$ величин $x^i y^j$ дают, таким образом, новое линейное представление группы вращений, отличное от первых двух.

Вообще совокупность линейных преобразований S над r переменными u_1, u_2, ..., u_r дает линейное представление группы вращений, если каждому вращению $\mathfrak{R}$ соответствует определенная подстановка S, причем произведению $\mathfrak{R}'\mathfrak{R}$ двух вращений соответствует произведение $S'S$ соответствующих преобразований. Целое число r называется *порядком* представления.

22. Эквивалентные представления. Два линейных представления группы вращений называются *эквивалентными*, если:

1° они имеют одинаковый порядок,

2° можно перейти от одного представления к другому, выполняя над переменными этого представления определенную линейную неособенную подстановку σ (с определителем, отличным от нуля).

Если S и T соответствуют вращению $\mathfrak{R}$, то

$$T = \sigma S \sigma^{-1},$$

где σ обозначает некоторую определенную подстановку.

Линейное представление называется *точным*, если двум различным вращениям соответствуют два различных линейных преобразования.

23. Понятие об эвклидовом тензоре. Можно поставить вопрос о конкретной интерпретации тех переменных $u_1, u_2, \ldots, u_r$, которые фигурируют в линейном представлении группы вращений. Можно говорить, что совокупность r чисел $(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ образует объект, и условиться считать, что результат применения к объекту $(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ вращения $\mathfrak{R}$ сводится к совмещению его с объектом $(u'_1, u'_2, \ldots, u'_r)$, составляющие которого u'_i получаются из u_i при помощи подстановки S, соответствующей $\mathfrak{R}$. Такое условие является вполне законным, так как результат применения вращения $\mathfrak{R}'$ к объекту (u') тот же самый, что и результат применения вращения $\mathfrak{R}'\mathfrak{R}$ к начальному объекту (u). Можно, между прочим, сузить рассматриваемое семейство объектов (u), налагая на составляющие $u_1, u_2, \ldots, u_r$ требование удовлетворять определенным алгебраическим соотношениям при условии, что:

1° составляющие $u_1, u_2, \ldots, u_r$ объектов суженного семейства не удовлетворяют никакому линейному соотношению с постоянными коэффициентами,

2° алгебраические соотношения, определяющие суженное семейство, должны быть инвариантными при преобразованиях линейного представления.

Полученная таким образом совокупность называется *эвклидовым тензором*; условимся говорить, что он отнесен к точке O. Два эвклидова тензора называются эквивалентными, если они соответствуют одному и тому же линейному представлению группы вращений или двум эквивалентным представлениям.

Например, совокупность векторов (с началом в точке O), совокупность векторов длины 1, совокупность изотропных векторов образуют три эквивалентных тензора; если каждый вектор одной из этой совокупности определить составляющими в декартовом репере, то вторая совокупность характеризуется соотношением $\Phi(x) = 1$, третья — соотношением $\Phi(x) = 0$, где $\Phi(x)$ — фундаментальная форма. Важно заметить, что тензор определяется не природой тех объектов, которые его составляют, но выбором составляющих, определяющих его аналитически.

Например, пара противоположных вещественных векторов $\vec{x}$ и $-\vec{x}$ может быть представлена аналитически или при помощи $\frac{n(n+1)}{2}$ одночленов $x^i x^j$, или при помощи $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$ одночленов $x^i x^j x^k x^h$; каждое из этих аналитических представлений определяет эвклидов тензор, и эти два тензора не эквивалентны.

Разумеется, все то, что было сказано относительно группы вращений, можно было бы распространить на группу вращений и отражений; нужно, однако, отметить, что тензор относительно группы вращений не является необходимо тензором относительно группы вращений и отражений, в дальнейшем мы встретим соответствующий пример (п. 51). Таким образом, следует различать эвклидовы тензоры в узком смысле, дающие линейные представления группы вращений, и эвклидовы тензоры в широком смысле, соответствующие линейным представлениям группы вращений и отражений. В вещественном псевдоэвклидовом пространстве можно провести более детальную классификацию в зависимости от того, рассматривается ли группа собственных вращений, или же всех вращений, или группа собственных вращений и отражений и т. д.

24. Другая точка зрения. Можно также встать на несколько иную точку зрения, которая обычно и применяется в тензорном исчислении. Рассмотрим уравнения, которые определяют вращение $\mathfrak{R}$, примененное к вектору $\vec{x}$, отнесенному к данному декартову реперу R. Уравнения подстановки S, соответствующей вращению $\mathfrak{R}$, могут быть рассматриваемы как определяющие переход от составляющих x^i вектора к составляющим $(x^i)'$ *того же самого вектора*, но отнесенного к реперу R', который получается из R при помощи вращения $\mathfrak{R}$. При этой точке зрения мы рассматриваем подстановку S как преобразование координат, причем S определяет поворот старого репера в новое положение, *определяемый аналитически в старом репере*. Важно отметить, что старый и новый реперы *равны* с точки зрения группы вращений. Линейное преобразование группы вращений дает, таким образом, преобразование координат, оперируя над составляющими произвольного вектора, но *различные рассматриваемые системы координат не* *являются произвольно выбранными декартовыми системами:* они должны быть все эквивалентны относительно группы вращений, так как соответствующие реперы конгруэнтны.

Можно было бы также рассматривать формулы, дающие преобразования составляющих вектора, когда вектор относится к совершенно произвольным переменным декартовым реперам. Линейные преобразования, получающиеся при этом, дают уже линейное представление не группы вращений, но более обширной группы *аффинных вращений*; они выражаются линейными преобразованиями совершенно произвольными. С этой точки зрения вектор и p-вектор являются *аффинными тензорами* в том смысле, что они дают линейные представления группы аффинных вращений. Таким образом понятие тензора и вводится в классическом тензорном исчислении.

II. Тензорная алгебра

Понятие о тензоре может быть обобщено для любой группы G; тензор, относящийся к группе G, может быть определен при помощи линейного представления этой группы. Объекты, которые определяют этот тензор, могут быть конкретно интерпретированы различными способами.

Какова бы ни была рассматриваемая группа G, тензорное исчисление вводит определенные простейшие операции и подчиняется определенным общим теоремам, которые мы кратко и укажем.

25. Сложение двух эквивалентных тензоров. Возьмем два эквивалентных тензора с составляющими $x^1, x^2, \ldots, x^r$ и $y^1, y^2, \ldots, y^r$, которые выбраны таким образом, что линейное преобразование, соответствующее любому элементу группы G, одно и то же для переменных x^i и для y^i. Назовем суммой этих тензоров тензор с составляющими $x^i + y^i$; эта сумма дает тензор, эквивалентный данным тензорам. Вообще, величины $mx^i + ny^i$, где m и n — определенные постоянные, определяют тензор, эквивалентный данным.

26. Произведение двух любых тензоров. Пусть даны два тензора (эквивалентные или неэквивалентные) с составляющими

$x^1, x^2, \ldots, x^r$, и $y^1, y^2, \ldots, y^r$; *произведением* этих тензоров называется тензор, определяемый составляющими $x^i y^j$.

27. Некоторые основные теоремы.

Теорема I. *Пусть $x^1, x^2, \ldots, x^r$ — составляющие тензора, $y^1, y^2, \ldots, y^r$ — переменные, которые преобразуются элементами группы G так, что сумма $x^i y_i$ остается инвариантной; r величин y_i определяют тензор, природа которого зависит только от природы первого тензора*[1].

В самом деле, пусть

$$(x^i)' = a^i_k x^k$$

— линейные преобразования составляющих первого тензора при применении элементов группы G; преобразования $y_i \to y$ величин y_i удовлетворяют тождеству

$$a^i_k x^k y'_i = x^k y_k,$$

откуда

$$y_k = a^i_k y'_i;$$

отсюда вытекает, что y'_i связаны с y_k линейной подстановкой, зависящей исключительно от линейного преобразования составляющих x_i.

Теорема II. *Пусть $x^1, x^2, \ldots, x^r$ — составляющие тензора, $y_1, y_2, \ldots, y_s$ — величины, которые преобразуются элементами группы G таким образом, что выражения*

$$z_\alpha \equiv c^k_{i\alpha} x^i y_k \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, h)$$

преобразуются как составляющие тензора; тогда hr величин $c^k_{i\alpha} y_k$ ($i = 1, 2, \ldots, r$; $\alpha = 1, 2, \ldots, h$) определяют тензор, природа которого зависит только от природы тензора (x) и тензора (z). Порядок этого тензора равен числу независимых линейных форм $c^k_{i\alpha} y_k$.

---

[1]) Мы говорим, что два тензора *одной и той же природы*, если они эквивалентны.

Предположим, в самом деле, что любым элементом группы G величины x^i и z_α преобразуются линейно:

$$(x^i)' = a^i_j x^j,$$

$$z'_\alpha = b^\lambda_\alpha z_\lambda;$$

имеем

$$c^k_{i\alpha} a^i_j x^j y'_k = b^\lambda_\alpha c^k_{j\lambda} x^j y_k,$$

откуда

$$c^k_{i\alpha} a^i_j y'_k = b^\lambda_\alpha c^k_{j\lambda} y_k \qquad (\alpha = 1,\ 2, \ldots,\ h;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r).$$

Эти уравнения могут быть разрешены относительно величин $c^k_{i\alpha} y'_k$, причем эти последние выразятся линейно через $c^k_{j\lambda} y_k$.

28. Приложение. Мы видели (п. 19), что каждое бесконечно малое вращение зависит от $\frac{n(n-1)}{2}$ величин $a_{ij} = -a_{ji}$, причем вектор скорости v_i точки x^i определяется следующим образом:

$$v_i = a_{ik} x^k.$$

Мы говорили, что величины a_{ik} могут быть рассматриваемы как составляющие бивектора. В действительности мы не доказали этого: мы не убедились, что при применении вращения к вектору $\vec{x}$ и его скорости v_i величины a_{ij} будут преобразовываться как составляющие бивектора. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{y}$ и скалярное произведение $\vec{y}\vec{v} = a_{ik} y^i x^k = \sum_{ik} a_{ik}(y^i x^k - y^k x^i)$ (второе суммирование распространяется на $\frac{n(n-1)}{2}$ сочетаний из индексов 1, 2, ..., n по два). Эта сумма является инвариантом; с другой стороны, величины $y^i x^k - y^k x^i$ определяют тензор, следовательно, являются составляющими тензора и a_{ik} (теорема I), и закон преобразования a_{ik} зависит только от закона преобразования величин $y^i x^k - y^k x^i$.

С другой стороны, пусть $\vec{u}$ и $\vec{v}$ — два произвольных вектора, сумма

$$\sum_{ik} (u_i v_k - v_i u_k)(y^i x^k - y^k x^i) = u_i y^i v_k x^k - v_i y^i u_k x^i$$

является инвариантом; таким образом, величины $u_i v_k - u_k v_i$ преобразуются, как a_{ik}, и являются составляющими простого бивектора; следовательно, *бесконечно малое вращение определяет тензор, эквивалентный бивектору.*

III. Тензоры приводимые и неприводимые

29. Определение. Тензор, соответствующий группе G, называется *приводимым*, если из его составляющих u_1, $u_2, \ldots, u_r$ можно образовать $p < r$ линейных комбинаций с постоянными комплексными коэффициентами, обладающих тензорным характером, то есть линейно преобразующихся между собой любым преобразованием из группы G.

Тензор, не являющийся приводимым, называется *неприводимым.*

Тензор называется *вполне приводимым*, если при помощи линейного преобразования над составляющими их можно разбить на определенное число классов:

$$\begin{array}{l} x_1,\ x_2, \ldots,\ x_p; \\ y_1,\ y_2, \ldots,\ y_q; \\ z_1,\ z_2, \ldots,\ z_r; \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

таким образом, что составляющие каждого класса линейно преобразуются между собой неприводимым образом.

Ясно, что тензор, эквивалентный неприводимому, сам является неприводимым; то же имеет место в случае полной приводимости.

Тензор, принадлежащий к группе G, дает ее линейное представление, а также и каждой подгруппы g этой группы; таким образом, он является тензором и для g. Если он неприводим относительно подгруппы g, то он, очевидно, является неприводимым и относительно G, но обратное не всегда справедливо. Мы уже приводили пример, когда G является группой вращений и отражений, а g — группой вращений.

30. Критерий неприводимости. Понятие неприводимости можно представить следующим образом. Будем интерпретировать r составляющих рассматриваемого тензора как составляющие вектора r-мерного пространства. Если этот тензор приводим, то существует $\rho < r$ линейных комбинаций r величин u_i, преобразующихся линейно между собой преобразованиями из группы G. Следовательно, плоскость Π, проходящая через начало и определяемая приравниванием нулю этих ρ форм, инвариантна относительно группы G. Обратно, если G оставляет инвариантной некоторую плоскость Π, проходящую через начало, левые части линейных уравнений, определяющих Π, преобразуются между собой линейно при подстановках S, то есть тензор является приводимым. Таким образом, *тензор тогда и только тогда является неприводимым, если преобразования S не оставляют инвариантной никакую плоскость, проходящую через начало.*

31. Одно свойство неприводимых тензоров. Отсюда можно вывести одно свойство неприводимых тензоров, которое будет полезно для нас в дальнейшем. Будем интерпретировать каждый частный тензор рассматриваемого семейства тензоров вектором $\vec{u}$ в r-мерном пространстве E_r. Мы не получим, таким образом, обязательно всех векторов пространства E_r, но так как не существует линейной и однородной зависимости между составляющими $u_1, u_2, \ldots, u_r$ тензоров семейства, то каждый вектор пространства E_r может быть представлен в виде линейной комбинации векторов, интерпретирующих тензоры семейства. Предположим, что тензор неприводим и применим к вектору $\vec{u}_0$, изображающему некоторый частный тензор семейства, все преобразования из группы G. Мы получим определенную совокупность векторов. *Эти векторы не могут лежать в одной и той же плоскости* Π, *проходящей через начало.* В самом деле, пусть Π имеет наименьшее число измерений среди таких плоскостей; тогда каждый вектор $\vec{u}$ плоскости Π является линейной комбинацией определенного числа векторов совокупности, например, векторов, которые получаются из $\vec{u}_0$ при помощи преобразований $S_1, S_2, \ldots, S_p$. Применив к этому вектору $\vec{u}$ преобразование из группы G, определяемое подстановкой S, мы получим ту же линейную комбинацию векторов $SS_1\vec{u}_0$, $SS_2\vec{u}_0$, ..., $SS_p\vec{u}_0$, которые все по предположению лежат в П. Следовательно, преобразования S оставляют инвариантной плоскость П, а так как тензор неприводим, то это может быть только в том случае, если П совпадает со всем пространством.

32. Проблема. Рассмотрим неприводимый вектор с r составляющими u_1, u_2, ..., u_r. Исследуем вопрос, существует ли такое линейное преобразование составляющих (преобразование базиса), при котором новые составляющие для каждого элемента из группы G преобразуются той же самой линейной подстановкой S, что и старые составляющие.

Пусть σ — искомая линейная подстановка, преобразующая старые составляющие в новые; тогда при любом преобразовании S мы должны иметь:

$$\sigma S \sigma^{-1} = S \text{ или } \sigma S = S \sigma. \tag{1}$$

В пространстве E_r векторов $\vec{u}$ существует всегда вектор $\vec{u}_0$, который при преобразовании σ не изменяет направления, а умножается только на некоторое число m. В самом деле, пусть σ определяется уравнениями

$$v_i = c_i^k u_k;$$

ищем r чисел u_i, удовлетворяющих уравнениям:

$$c_i^k u_k = m u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Эти уравнения допускают нетривиальное решение, если определитель

$$\begin{vmatrix} c_1^1 - m & c_1^2 & \ldots & c_1^r \\ c_2^1 & c_2^2 - m & \ldots & c_2^r \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ c_r^1 & c_r^2 & \ldots & c_r^r - m \end{vmatrix}$$

равен нулю; достаточно за m принять один из корней этого полинома.

Из уравнения

$$\sigma\vec{u}_0 = m\vec{u}_0$$

и соотношений (1) выводим

$$\sigma(S\vec{u}_0) = S(\sigma\vec{u}_0) = m(S\vec{u}_0);$$

таким образом, преобразование σ умножает вектор $S\vec{u}_0$ на m. Но так как тензор приводим, то каждый вектор пространства E_r является линейной комбинацией векторов $S\vec{u}_0$, то есть при применении σ умножается на m. Следовательно, $v_i = mu_i$.

Теорема. *Единственное линейное преобразование переменных, оставляющее инвариантными все подстановки линейного неприводимого представления группы G, состоит в умножении всех переменных на один и тот же постоянный множитель m.*

33. Нахождение неприводимых тензоров, которые могут быть получены из вполне приводимого тензора. Применим полученные выше результаты к решению следующей проблемы. Возьмем вполне приводимый тензор, относящийся к группе G. Предположим, например, что соответствующим выбором составляющих он разлагается на 5 неприводимых тензоров, из которых 3 первых эквивалентны между собой, так же как и два последних. Обозначим соответственно через

$$\begin{array}{l} x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p, \\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_p, \\ z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_p, \\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_q, \\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_q \end{array}$$

составляющие этих пяти тензоров. Мы можем предполагать, что составляющие x_i, y_i, z_i выбраны таким образом, что линейные преобразования над переменными x_i, y_i, z_i одни и те же; аналогично — относительно u_i и v_i.

Определим все неприводимые тензоры, которые можно выделить из заданного вполне приводимого тензора. Составляющие такого тензора будут линейными комбинациями x_i, y_i, z_i, u_i, v_i.

Пусть
$$\Sigma a_i x_i + \Sigma b_j y_j + \Sigma c_k z_k + \Sigma h_\alpha u_\alpha + \Sigma k_\beta v_\beta$$
— одна из этих составляющих. Если один из коэффициентов a_i отличен от нуля, то невозможно, чтобы все составляющие x_i отсутствовали в какой-нибудь другой из линейных комбинаций, образующих искомый тензор; в самом деле, в противном случае совокупность всех линейных комбинаций, в которые не входят x_i, обладала бы сама тензорным характером. С другой стороны, различные величины $\Sigma a_i x_i$ преобразуются линейно между собой, и, так как x_i образуют неприводимый тензор, отсюда следует, что искомый тензор содержит обязательно p независимых составляющих, которые могут быть приведены к виду
$$\begin{array}{l} x_1 + \ldots, \\ x_2 + \ldots, \\ \ldots\ldots, \\ \ldots\ldots, \\ x_p + \ldots, \end{array}$$
где многоточия обозначают линейные комбинации переменных y_i, z_i, u_i, v_i. p линейных комбинаций из y_i, которые здесь фигурируют (мы предполагаем, что они не равны все нулю), преобразуются тогда как $x_1, x_2, \ldots, x_p$; следовательно (п. 32), они имеют вид $my_1, my_2, \ldots, my_p$. Аналогичную картину имеем для комбинаций из z_i. Что касается переменных u_i, то они не могут входить, так как p линейных комбинаций, которые тогда фигурировали бы, преобразовывались бы между собой как x_i; отсюда вытекало бы, что $q = p$ и что u_i образует тензор, эквивалентный x_i, что противоречит предположению.

34. Приложение. Из полученных результатов вытекает один важный вывод. Предположим, что мы имеем класс объектов, преобразующихся между собой элементами группы G, и что каждому объекту можно отнести некоторую совокупность r величин u_α, обладающих следующими свойствами:

1° каждому элементу группы G соответствует определенная линейная подстановка S, преобразующая величины u_α;

2° линейные преобразования S дают линейное представление группы G.

Возникает вопрос, может ли между u_α существовать одно или несколько линейных соотношений с постоянными коэффициентами.

Сделанное предположение сводится к тому, что в некотором r-мерном пространстве E_r векторы $\vec{x}$. определяют своими r составляющими x_α некоторый тензор $\mathfrak{T}$. Векторы $\vec{u}$, отнесенные к объектам рассматриваемого класса, образуют только часть векторов $\vec{x}$ пространства E_r. Но подстановки S преобразуют их между собой; следовательно, плоскость наименьшего числа измерений, содержащая векторы $\vec{u}$, инвариантна при подстановках S. Левые части уравнений, определяющих эту плоскость, определяют тензор, выделенный из $\mathfrak{T}$. Следовательно, *линейные соотношения между u_α получаются приравниванием нулю всех составляющих некоторого тензора, выделенного из $\mathfrak{T}$.*

Предположим, например, что тензор $\mathfrak{T}$ разлагается на три неприводимых эквивалентных между собой тензора и что составляющие

$$x_1, x_2, \ldots, x_p, \quad y_1, y_2, \ldots, y_p, \quad z_1, z_2, \ldots, z_p$$

этих трех тензоров выбраны таким образом, чтобы x_i, y_i и z_i преобразовывались одной и той же линейной подстановкой для каждого данного элемента группы G. Искомые соотношения получатся, если выписать одну или несколько систем p соотношений вида

$$ax_i + by_i + cz_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

где a, b, c — постоянные коэффициенты.

35. Основная теорема. Применим полученные результаты к доказательству следующей замечательной теоремы:

Теорема Бернсайда[1]). *Между коэффициентами линейных подстановок S, образующих неприводимое линейное представление группы G, не может существовать линейных соотношений с постоянными коэффициентами.*

[1]) London Math. Soc. Proc. 3, 1905, стр. 430.

Рассмотрим линейное представление порядка n, и пусть u_i^j обозначают коэффициенты подстановки S общего вида:

$$x_i' = u_i^k x_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Если A — некоторая частная подстановка этого представления, то $S' = AS$ некоторая другая подстановка, причем ее коэффициенты $(u_i^j)'$ связаны с u_i^j соотношениями

$$(u_i^j)' = a_i^k u_k^j. \tag{2}$$

Каждому элементу a группы G соответствует, таким образом, линейное преобразование (2) над n^2 величинами u_i^j; эти линейные преобразования дают линейное представление группы G, так как произведению элементов a и b из G соответствует последовательное применение двух преобразований

$$S' = AS, \qquad S'' = BS' = (BA)S.$$

Мы можем теперь применить теорему предыдущего параграфа. Если в уравнениях (2) мы фиксируем индекс j, то величины $u_1^j, u_2^j, \ldots, u_n^j$ преобразуются так же, как преобразуются при подстановке A составляющие тензора, соответствующего данному представлению; так как этот тензор неприводим, то отсюда следует, что тензор u_i^j разлагается на n неприводимых тензоров, эквивалентных между собой. Следовательно, все линейные соотношения между u_i^j получатся, если выписать одну или несколько систем уравнений вида

$$m_1 u_i^1 + m_2 u_i^2 + \ldots + m_n u_i^n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где m_k — постоянные. Но такие соотношения невозможны, так как определитель подстановки S был бы нулем. Теорема, таким образом, доказана.

В качестве примера возьмем группу вращений вещественной плоскости в применении к векторам:

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha;$$

так как коэффициенты этого преобразования линейно зависимы, то вектор не может быть неприводимым тензором. В самом деле, он разлагается на два неприводимых тензора $x+iy$ и $x-iy$, имеющих по одной составляющей.

36. Критерий неприводимости. Из теоремы Бернсайда вытекает критерий неприводимости линейного представления.

Теорема. *Линейное представление группы G тогда и только тогда неприводимо, если между коэффициентами различных подстановок, определяющих данное представление, не существует линейных соотношений с постоянными коэффициентами, не равными одновременно нулю.*

Условие необходимо на основании теоремы Бернсайда. Оно очевидно и достаточно, так как если оно выполнено, то из данного тензора $\mathfrak{T}$ порядка r невозможно выделить никакого тензора $\mathfrak{T}'$ более низкого порядка ρ; в самом деле, если за ρ первых составляющих тензора $\mathfrak{T}$ принять составляющие тензора $\mathfrak{T}'$, то коэффициенты при $n-\rho$ последних переменных в первых ρ уравнениях подстановки S были бы все равны нулю.

IV. Матрицы

37. Определение. Каждое линейное преобразование S над n переменными x_i:

$$x'_i = a_i^k x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

может быть определено при помощи *матрицы* — квадратной таблицы с n строками и n колоннами, составленной из коэффициентов преобразования. Эту матрицу мы будем обозначать также буквой S. Если над преобразованными переменными x'_i выполнить новую подстановку S':

$$x''_i = b_i^k x'_k,$$

то результирующая подстановка $S'' = S'S$ определяется формулами

$$x''_i = b_i^k a_k^h x_h.$$

Отсюда выводим закон умножения матриц: элементы c_i^j матрицы $S'' = S'S$ имеют вид:

$$c_i^j = b_i^k a_k^j.$$

В общем случае можно рассматривать прямоугольные (не квадратные) матрицы и определить предыдущими формулами произведение $S'S$ при условии, что число столбцов матрицы S' равно числу строк матрицы S. В частности, обозначив через x матрицу с n строками и 1 колонной, элементами которой являются $x_1, x_2, \ldots, x_n$, через x' аналогичную матрицу, получающуюся при преобразовании S, имеем

$$x' = Sx.$$

38. Сложение, умножение на число. Суммой $S + S'$ двух матриц S и S', имеющих одинаковое число строк и столбцов, называется матрица, элементы которой получаются сложением соответствующих элементов матриц S и S'.

Произведением mS матрицы S на число m называется матрица, получающаяся при умножении всех элементов матрицы S на m.

39. Замечание к вычислению произведения матриц. Необходимо сделать одно замечание к вычислению произведения $S'S$ двух линейных преобразований. Если пытаться получить x''_i, соответствующее преобразованию $S'S$, подставляя в уравнениях $x'_i = a^k_i x_k$, соответствующих преобразованию S, вместо x_k результат применения S', то есть $b^h_k x_h$, то получится неправильный результат

$$x''_i = a^k_i\, b^h_k x_h$$

вместо

$$x''_i = b^k_i\, a^h_k x_h.$$

Для того чтобы применить указанный процесс вычисления, следует S' и S поменять местами, применяя сначала S', затем S. То же следует заметить о произведении нескольких преобразований.

40. Матрицы транспонированные и обратные. *Транспонированной матрицей* S^* от матрицы S называется матрица, получающаяся из S заменой строк столбцами. Таким образом, матрица x^* имеет одну строку и n столбцов, составленных из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Из равенства $S''=S'S$ получаем при переходе к транспонированным матрицам следующее соотношение:

$$S''^{*}=S^{*}S'^{*};$$

в частности, формула $x'=Sx$ дает $x'^{*}=x^{*}S^{*}$.

Матрицей S^{-1}, *обратной* данной квадратной матрице S, определитель которой не равен нулю, называется матрица, соответствующая линейному преобразованию, обратному S. Имеем

$$SS^{-1}=S^{-1}S=1,$$

где через 1 мы будем обозначать (в тех случаях, когда не может возникнуть недоразумения) матрицу, диагональные элементы которой равны единице, а все остальные нулю. Имеем при любом выборе матрицы S

$$1S=S1=S.$$

Будем называть *диагональной* такую матрицу, элементы которой, не стоящие на главной диагонали, равны нулю.

41. Подобные матрицы. Мы видели (п. п. 20, 22), что при замене переменных в линейной подстановке S новыми переменными, связанными со старым линейным преобразованием A, получается подстановка ASA^{-1}. Будем говорить, что матрицы S и ASA^{-1} подобны и что вторая преобразована из первой при помощи матрицы A.

Подобные матрицы имеют равные детерминанты. Матрица, преобразованная из $S'S$ при помощи A, равна произведению матриц, преобразованных из S и S'; это вытекает из равенства:

$$A(S'S)A^{-1}=(AS'A^{-1})(ASA^{-1}).$$

Аналогично матрица, обратная преобразованной, равна преобразованной обратной, так как

$$(ASA^{-1})(ASA^{-1})^{-1}=(ASA^{-1})(AS^{-1}A^{-1})=ASS^{-1}A^{-1}=1.$$

42. Характеристическое уравнение. Собственные значения. *Характеристическим уравнением* квадратной матрицы S называется уравнение с неизвестной λ, получающееся приравниванием нулю определителя матрицы $S-\lambda$; элементы последней получаются вычитанием λ из элементов главной диагонали матрицы S. Корни характеристического уравнения называются *собственными значениями* матрицы S.

Две подобные матрицы S и ASA^{-1} имеют одинаковое характеристическое уравнение, так как

$$ASA^{-1} - \lambda = A(S - \lambda)A^{-1},$$

откуда

$$|ASA^{-1} - \lambda| = |A||S - \lambda||A^{-1}| = |S - \lambda|.$$

Если λ_0 является собственным значением матрицы S, соответствующей линейному преобразованию в векторном пространстве E_n, то существует ненулевой вектор $\vec{x}_0$, который при преобразовании S умножается на λ_0:

$$S\vec{x}_0 = \lambda\vec{x}_0.$$

43. Унитарные матрицы. Квадратная матрица U с комплексными элементами называется *унитарной*, если соответствующее линейное преобразование оставляет инвариантной сумму квадратов модулей переменных, то есть произведение $\bar{x}^*x$, где $\bar{x}$ обозначает матрицу с одним столбцом и n строками, комплексно сопряженную с x. Имеем:

$$\bar{x}^{*\prime}x' = \bar{x}^*\bar{U}^*Ux;$$

таким образом, условие того, что U является унитарной матрицей, выражается следующим образом:

$$\bar{U}^*U = 1 \text{ или } \bar{U}^* = U^{-1},$$

то есть *матрица, транспонированная и комплексно сопряженная с U, равна матрице, обратной U.*

Теорема. *Каждая унитарная матрица может быть преобразована при помощи унитарной же матрицы к диагональному виду, причем модули стоящих на главной диагонали элементов преобразованной матрицы равны единице.*

Условимся называть скалярным произведением двух векторов x и y величину $\bar{x}^*y$. Это произведение при перестановке векторов меняет свое значение на комплексно сопряженное. Скалярный квадрат вектора равен сумме квадратов модулей его составляющих; если этот квадрат равен нулю, то равен нулю и вектор. Вектор, скалярный квадрат которого равен 1, будем называть унитарным. Два вектора называются взаимно перпендикулярными, если их скалярное произведение равно нулю. Отметим, наконец, что каждая унитарная матрица U оставляет инвариантным скалярное произведение двух векторов; в самом деле,

$$\overline{x}^{*\prime}y' = \overline{x}^{*}\overline{U}^{*}Uy = \overline{x}^{*}y.$$

Обратимся теперь к доказательству теоремы. Пусть λ — собственное значение матрицы U; тогда существует ненулевой вектор x, удовлетворяющий соотношению

$$Ux = \lambda x;$$

при помощи транспонирования и перехода к комплексно сопряженным значениям получаем

$$\overline{x}^{*}\overline{U}^{*} = \overline{\lambda}\overline{x}^{*},$$

откуда при помощи перемножения получаем

$$\overline{x}^{*}\overline{U}^{*}Ux = \overline{x}^{*}x = \lambda\overline{\lambda}\,\overline{x}^{*}x, \quad \text{то есть} \quad \lambda\overline{\lambda} = 1.$$

Таким образом, *все собственные значения матрицы U по модулю равны* 1.

Отметим, с другой стороны, что *матрица, преобразованная из U при помощи унитарной матрицы, также является унитарной:*

$$(\overline{C}\,\overline{U}\,\overline{C}^{-1})^{*} = \overline{C}^{*-1}\overline{U}^{*}\overline{C}^{*} = CU^{-1}C^{-1} = (CUC^{-1})^{-1}.$$

Обозначим через $\vec{e}_1$ унитарный вектор, который при преобразовании U умножается на λ_1. Матрица U оставляет инвариантным подпространство, в котором лежат векторы, перпендикулярные к $\vec{e}_1$; в этом подпространстве существует по крайней мере один вектор $\vec{e}_2$, который можно считать унитарным и который при преобразовании U умножается на λ_2. Матрица U оставляет инвариантным подпространство, ортогональное к $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$; в этом подпространстве существует по крайней мере один унитарный вектор $\vec{e}_3$, который при преобразовании U умножается на λ_2, и так далее. Мы приходим, таким образом, к базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Каждый вектор может быть представлен в виде

$$y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_n,$$

причем скалярный квадрат этого вектора равен $y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2 + \ldots + y_n\bar{y}_n$. Таким образом, преобразование C, переводящее x_i в y_i, унитарно, и матрица $U' = CUC^{-1}$, определяющая преобразование над y_i, переводит вектор $\Sigma y_i\vec{e}_i$ в $\Sigma\lambda_i y_i\vec{e}_i$. Следовательно, U' — диагональная матрица, и ее диагональные элементы λ_i по модулю равны единице.

44. Ортогональные матрицы. Квадратная матрица называется *ортогональной*, если соответствующее линейное преобразование оставляет инвариантной сумму квадратов переменных, то есть x^*x. Соотношение

$$x^*O^*Ox = x^*x$$

дает

$$O^*O = 1, \text{ или } O^* = O^{-1},$$

то есть *транспонированная ортогональная матрица равна своей обратной.*

Если ортогональная матрица имеет вещественные элементы, она унитарна. Приведение, указанное в предыдущем параграфе, дает в рассматриваемом случае n векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, комплексных, если соответствующие собственные значения комплексны, вещественных при вещественных собственных значениях (равных тогда ± 1); кроме того, сумма квадратов модулей составляющих каждого вектора равна 1. Выберем один из этих векторов, например $\vec{e}_1$; пусть это — комплексный вектор

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\eta}_1 + i\vec{\eta}_2),$$

причем $\vec{\eta}_1$, $\vec{\eta}_2$ вещественны. Нетрудно видеть, что $\vec{e}_1$ определяет изотропное направление в пространстве, то есть $\vec{\eta}_1$ и $\vec{\eta}_2$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы, причем

$$O\eta_1 = \cos\alpha\,\eta_1 - \sin\alpha\,\eta_2,$$
$$O\eta_2 = \sin\alpha\,\eta_1 + \cos\alpha\,\eta_2.$$

Матрица O оставляет инвариантной плоскость, ортогональную к $\vec{\eta}_1$ и $\vec{\eta}_2$, причем она преобразует векторы этой плоскости ортогональным преобразованием. Таким образом, можно найти два единичных вектора $\vec{\eta}_3, \vec{\eta}_4$, ортогональных между собой и к $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2$; эти векторы $\vec{\eta}_3, \vec{\eta}_4$ преобразуются аналогичным образом. Собственным значениям ± 1 матрицы O соответствуют векторы, которые при ортогональном преобразовании или инвариантны, или только меняют знак.

В результате мы видим, что при помощи некоторой ортогональной матрицы C можно матрицу O преобразовать к виду, аналогичному следующему:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

определитель такой матрицы равен ± 1; матрица называется *прямой ортогональной*, если ее определитель равен $+1$.

45. Применение к разложению вещественного вращения. Полученный результат дает интересное свойство группы вращений и отражений вещественного эвклидова пространства, В этом пространстве, отнесенном к ортогональному реперу, вращения и отражения определяются вещественными ортогональными матрицами. Назовем *простым вращением* такое вращение, при котором все координаты, за исключением двух, например, x_i, x_j постоянны, причем

$$x_i' = x_i \cos\alpha - x_j \sin\alpha,$$
$$x_j' = x_i \sin\alpha + x_j \cos\alpha;$$

α называется углом простого вращения; двумерная плоскость, построенная на $\vec{e}_i$, $\vec{e}_j$, — плоскость этого вращения. Мы можем формулировать следующую теорему:

Каждое вращение есть произведение некоторого числа $\leqslant \frac{n}{2}$ простых вращений, двумерные плоскости которых взаимно перпендикулярны; каждое отражение есть произведение некоторого числа $\leqslant \frac{n-1}{2}$ простых вращений и симметрии относительно гиперплоскости, содержащей двумерные плоскости всех простых вращений.

46. Эрмитовы матрицы. Квадратная матрица H называется *эрмитовой*, если ее транспонированная равна комплексно сопряженной:

$$H^* = \overline{H}.$$

Матрица, преобразованная из эрмитовой при помощи унитарной, является эрмитовой; это следует из соотношения

$$(C^{-1})^* H^* C^* = \overline{C}\,\overline{H}\,\overline{C}^{-1}.$$

Теорема. *Каждая эрмитова матрица может быть преобразована при помощи унитарной к диагональному виду, в котором все элементы вещественны.*

Покажем прежде всего, что собственные значения матрицы H вещественны. Из соотношения

$$Hx = \lambda x,$$

переходя к транспонированным комплексно сопряженным матрицам, получаем

$$\overline{x}^* H = \overline{\lambda x}^*;$$

умножая первое соотношение слева на $\overline{x}^*$, второе справа на x, получаем

$$\overline{x}^* H x = \lambda \overline{x}^* x = \overline{\lambda}\, \overline{x}^* x,$$

откуда $\overline{\lambda} = \lambda$.

Введем теперь в векторном пространстве унитарную метрику, в которой скалярное произведение векторов $\vec{x}, \vec{y}$ определяется формулой $\overline{x}^* y$. Существует по крайней мере один унитарный вектор $\vec{e}_1$, который при преобразовании H умножается на вещественное число λ_1. Каждый вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к $\vec{e}_1$, преобразуется в вектор $\vec{x}'$, перпендикулярный к $\vec{e}_1$; это следует из соотношения

$$\vec{e}_1^{\,*} x' = \vec{e}_1^{\,*} Hx = \bar{\lambda}_1 \vec{e}_1^{\,*} x.$$

Так как подпространство, в котором лежат векторы, перпендикулярные к $\vec{e}_1$, инвариантно относительно преобразования H, то оно содержит по крайней мере один унитарный вектор $\vec{e}_2$, который при применении H умножается на вещественный множитель λ_2. Продолжая это рассуждение дальше, мы приходим к системе n взаимно перпендикулярных унитарных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, которые при применении преобразования H умножаются соответственно на $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Принимая эти векторы за векторы базиса, мы преобразуем H при помощи унитарной матрицы C в диагональную матрицу с элементами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

47. Примечание. Произведение двух унитарных матриц одного и того же порядка есть матрица унитарная; аналогично произведение двух ортогональных матриц дает ортогональную матрицу. Но произведение двух эрмитовых матриц, вообще говоря, уже не является эрмитовой матрицей. Матрица HH' тогда и только тогда является эрмитовой, если

$$H'^* H^* = \bar{H}\bar{H}' \text{ или } H'H = HH',$$

то есть, если матрицы H и H' перестановочны. Совокупность линейных унитарных преобразований образует группу, как и совокупность ортогональных преобразований; но совокупность эрмитовых преобразований относительно умножения группы не образует.

Наоборот, сумма двух эрмитовых матриц является эрмитовой матрицей; ни унитарные, ни ортогональные матрицы этим свойством не обладают.

V. Неприводимость p-векторов

В заключение этой главы мы исследуем мультивекторы с точки зрения их неприводимости относительно группы вращений. Мы будем иметь в виду прежде всего вещественное эвклидово пространство, отнесенное к ортогональному реперу, но результаты могут быть применены без изменения к комплексному пространству.

48. Неприводимость p-вектора относительно группы вращений ($n \neq 2p$). Обозначим через σ_i симметрию, соответствующую вектору e_i базиса. Если бы p-вектор был приводим, то существовал бы тензор $\mathfrak{T}$ порядка $r < C_n^p$, составляющие которого были бы линейными комбинациями составляющих $x_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ [1]) p-вектора. Предположим, что в одной из этих составляющих коэффициент при $x_{12 \ldots n}$ не равен нулю. Тогда вращение $\sigma_1\sigma_2$ дало бы новую составляющую тензора $\mathfrak{T}$, которая получилась бы из первой изменением знаков у коэффициентов при $x_{i_1 i_2 \ldots i_p}$, содержащих один и только один из индексов 1 и 2; сложением мы исключили бы эти величины. Применяя так же вращения $\sigma_1\sigma_3, \ldots, \sigma_1\sigma_p$, мы придем к составляющей тензора $\mathfrak{T}$, содержащей $x_{12 \ldots p}$ и только те величины $x_{i_1 i_2 \ldots i_p}$, которые не имеют ни одного из индексов $1, 2, \ldots, p$. Пользуясь, наконец, вращениями $\sigma_1\sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_1\sigma_n$, мы доказали бы существование составляющей тензора $\mathfrak{T}$, содержащей вместе с $x_{12 \ldots p}$ только те $x_{i_1 i_2 \ldots i_p}$, в которые входят все индексы $p+1, p+2, \ldots, n$, но не входит ни один из индексов $1, 2, \ldots, p$. Но это возможно только в том случае, если $n = 2p$.

Таким образом, если $n \neq 2p$, тензор $\mathfrak{T}$ содержит составляющую $x_{12 \ldots p}$; но перестановка координат x_i в сопровождении с переменой знака у одной из координат (если перестановка нечетная) показывает, что тензор $\mathfrak{T}$ содержит все составляющие p-вектора, то есть этот последний неприводим.

---

[1]) Мы будем обозначать через $x_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ составляющие p-вектора (вместо обозначения $P_{i_1 i_2 \ldots i_p}$, введенного в п. 15).

49. Полу-ν-векторы пространства $E_{2\nu}$. Предположим теперь, что n — четное: $n=2\nu$ и $p=\nu$. Предыдущее рассуждение показывает, что тензор $\mathfrak{T}$ содержит по крайней мере одну из составляющих вида

$$x_{12\ldots\nu}+ax_{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(2\nu)}.$$

Перестановка, примененная к индексам, позволяет вывести отсюда существование составляющей

$$x_{k_1k_2\ldots k_\nu}\pm ax_{k_{\nu+1}k_{\nu+2}\ldots k_{2\nu}},$$

в которой следует брать знак $(+)$ или $(-)$ в зависимости от четности или нечетности перестановки $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. В частности, имеем составляющую

$$x_{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(2\nu)}+(-1)^\nu a\,x_{12\ldots\nu}.$$

Чтобы тензор $\mathfrak{T}$ не совпадал с ν-вектором, необходимо принять $a^2=(-1)^\nu$, то есть $a=\pm i^\nu$. Обратно, выберем, например $a=i^\nu$. Величины

$$x_{k_1k_2\ldots k_\nu}+i^\nu x_{k_{\nu+1}k_{\nu+2}\ldots k_{2\nu}},$$

где $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ является четной перестановкой, определяют тензор. В самом деле, составляющие дополнительного ν-вектора к данному определяются следующим образом:

$$y_{k_1k_2\ldots k_\nu}=x_{k_{\nu+1}k_{\nu+2}\ldots k_{2\nu}}.$$

Этот дополнительный ν-вектор образует тензор, эквивалентный ν-вектору. Следовательно, величины $x_{k_1k_2\ldots k_\nu}+$ $+my_{k_1k_2\ldots k_\nu}$ являются составляющими тензора. При $m=i^\nu$ получим найденные выше величины.

ν-вектор разлагается, таким образом, на два неприводимых тензора; *они не эквивалентны*, так как в противном случае ν-вектор дал бы бесконечное число неприводимых тензоров порядка $\frac{1}{2}C_{2\nu}^{\nu}$ (п. 33), между тем как он дает только два.

В произвольной декартовой системе координат полученные выше тензоры (мы будем называть их *полу-ν-векторами* первого и второго рода) определяются составляющими

$$x_{k_1 k_2 \dots k_\nu} + \varepsilon i^\nu \sqrt{g}\, x^{k_{\nu+1} k_{\nu+2} \dots k_{2\nu}} \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

как это вытекает из выражения для составляющих ν-вектора, дополнительного к данному ν-вектору (п. 17).

50. Примечания. Полученные результаты остаются в силе, если рассматривать группу вращений или даже просто группу собственных вращений в вещественном псевдоэвклидовом пространстве, хотя данное выше доказательство должно быть в этом случае пополнено. Это является следствием одной общей теоремы, которая будет дана в дальнейшем (п. 75).

Можно поставить вопрос: могут ли p-вектор и q-вектор $(p \neq q)$ образовывать эквивалентные тензоры? Это может быть только в случае $q = n - p$, — единственном случае, когда эти тензоры одинакового порядка.

Относительно группы вращений p-вектор и $(n-p)$-вектор эквивалентны, так как соответствующие составляющие p-вектора и дополнительного $(n-p)$-вектора преобразуются, очевидно, одинаково при вращении. С другой стороны, мы видели, что в случае $n = 2\nu$ полу-ν-вектор первого рода и полу-ν-вектор второго рода не эквивалентны.

51. Мультивекторы относительно группы вращений и отражений. Относительно группы вращений и отражений полу-ν-векторы не дают уже тензоров, так как симметрия переводит полу-ν-вектор первого рода в полу-ν-вектор второго рода.

Теорема. *p-векторы $(p = 1, 2, \dots, n)$ образуют неприводимые тензоры; они не эквивалентны между собой.*

Вторая половина теоремы доказывается легко: достаточно показать, что p-вектор и $(n-p)$-вектор $(n \neq 2p)$ не эквивалентны. Если бы они были эквивалентны, то можно было бы установить такое соответствие между составляющими этих тензоров, что при каждом вращении и отражении составляющие p-вектора и $(n-p)$-вектора преобразовались бы одинаково. Мы знаем, что при группе вращений это можно сделать единственным образом (п. 32); составляющая y_α $(n-p)$-вектора, которая должна соответствовать данной составляющей $x_{k_1k_2\ldots k_p}$ p-вектора, может только постоянным множителем отличаться от составляющей $(n-p)$-вектора, дополнительного данному p-вектору именно $y^{k_{p+1}k_{p+2}\ldots k_n}$ $(k_1, k_2, \ldots, k_n$ — четная перестановка) (п. 17). Если воспользоваться прямоугольной системой координат, то нетрудно видеть, что симметрия, соответствующая одному из векторов базиса, не меняет соответствующих составляющих по абсолютной величине, но в то же время у одной меняет знак на обратный, а у другой не меняет знака.

ГЛАВА III

СПИНОРЫ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА.

I. Понятие спинора

52. **Определение.** Рассмотрим в трехмерном пространстве E_3, отнесенном к ортогональной системе координат, изотропный вектор (x_1, x_2, x_3). Так как составляющие этого вектора удовлетворяют соотношению

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

то ему можно отнести два числа ξ_0, ξ_1 при помощи следующих формул:

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_0^2 - \xi_1^2, \\ x_2 &= i(\xi_0^2 + \xi_1^2), \\ x_3 &= -2\xi_0\xi_1. \end{aligned}$$

Получаем два решения для ξ_0, ξ_1:

$$\xi_0 = \pm\sqrt{\frac{x_1 - ix_2}{2}}, \qquad \xi_1 = \frac{x_1 + ix_2}{x_3}\xi_0.$$

Невозможно указать такое правило, имеющее внутренний геометрический смысл, которое позволило бы сделать определенный выбор знака для каждого изотропного вектора, если в то же время выставить требование, чтобы выбранное решение изменялось непрерывно вместе с вектором. В самом деле, предположим, что мы нашли такое правило; возьмем определенный изотропный вектор и будем его вращать около оси Ox_3 на переменный угол α, причем пусть α изменяется непрерывно; так как $x_1 - ix_2$ умножится на $e^{-i\alpha}$, то ξ_0 надо умножить по соображениям непрерывности на $e^{-i\frac{\alpha}{2}}$. После полного обхода на угол 2π величина ξ_0 умножается на $e^{-i\pi} = -1$; мы приходим к начальному положению вектора, но ξ_0 имеет новое значение, отличное от исходного.

Система двух величин ξ_0, ξ_1 называется *спинором*. Спинор, таким образом, является как бы *ориентированным*, или *поляризованным*, изотропным вектором; вращение около оси на угол 2π изменяет поляризацию этого изотропного вектора.

53. Спинор является эвклидовым тензором. Рассмотрим вращение (или отражение), заданное уравнениями

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3, \\
x'_2 &= \alpha' x_1 + \beta' x_2 + \gamma' x_3, \\
x'_3 &= \alpha'' x_1 + \beta'' x_2 + \gamma'' x_3,
\end{aligned}
$$

где α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' — девять направляющих косинусов трех взаимно перпендикулярных направлений. Рассмотрим спинор (ξ_0, ξ_1), соответствующий изотропному вектору (x_1, x_2, x_3), и один из спиноров (ξ'_0, ξ'_1), соответствующих преобразованному вектору; имеем:

$$
\begin{aligned}
\xi'^2_0 &= \frac{1}{2}\left((\alpha - i\alpha')x_1 + (\beta - i\beta')x_2 + (\gamma - i\gamma')x_3\right) = \\
&= \frac{1}{2}(\alpha - i\alpha' + i\beta + \beta')\xi_0^2 - (\gamma - i\gamma')\xi_0\xi_1 + \\
&\qquad + \frac{1}{2}(-\alpha + i\alpha' + i\beta + \beta')\xi_1^2.
\end{aligned}
$$

Правая часть является полным квадратом, так как дискриминант трехчлена равен

$$
\begin{aligned}
&(\gamma - i\gamma')^2 - (\alpha - i\alpha' + i\beta + \beta')(-\alpha + i\alpha' + i\beta + \beta') = \\
&\quad = (\alpha - i\alpha')^2 + (\beta - i\beta')^2 + (\gamma - i\gamma')^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Величина ξ'_0, таким образом, линейно выражается через ξ_0, ξ_1; то же надо сказать и относительно ξ'_1. После выбора одного из двух значений величины ξ'_0 величина ξ'_1 определяется из соотношения

$$
\xi'_0\xi'_1 = -\frac{1}{2}(\alpha'' + i\beta'')\xi_0^2 + \gamma''\xi_0\xi_1 + \frac{1}{2}(\alpha'' - i\beta'')\xi_1^2.
$$

В дальнейшем мы выведем линейные преобразования, создаваемые в области спиноров вращениями и отражениями.

54. Геометрическая интерпретация отношения $\frac{\xi_0}{\xi_1}$. Отношение $\frac{\xi_0}{\xi_1}$ при каждом вращении и отражении преобразуется дробно-линейной подстановкой. Это вытекает очень просто из того, что отношение $\frac{\xi_0}{\xi_1}$ может быть рассматриваемо как параметр образующей изотропного конуса, причем каждое вращение или отражение сохраняет ангармоническое отношение четырех образующих этого конуса. Если дробно-линейная подстановка известна, вращение определено; в самом деле, если M — произвольная точка пространства, то две изотропных прямых, перпендикулярных к OM, преобразуются в определенные изотропные прямые, к которым перпендикулярна прямая OM'; таким образом, прямая OM' определена, то есть определена и точка M'. Эти рассуждения лежат в основе теории параметров Эйлера-Олинда-Родрига, как мы увидим это дальше.

II. Матрицы, соответствующие векторам

55. Матрица, соответствующая вектору. Вернемся к спинорам. Уравнения изотропной прямой, определяемой изотропным вектором, соответствующим спинору ξ, могут быть написаны в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 x_3 + \xi_1 (x_1 - i x_2) &= 0 \\ \xi_0 (x_1 + i x_2) - \xi_1 x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Рассмотрим матрицу

$$X = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & -x_3 \end{pmatrix},$$

образованную из коэффициентов при ξ_0 и ξ_1 в левых частях уравнений. Рассматривая x_1, x_2, x_3 как составляющие некоторого вектора $\vec{x}$, мы будем говорить, что матрица X соответствует этому вектору, причем мы будем говорить часто просто „вектор X", вместо „вектор, которому соответствует матрица X".

Матрицы X обладают следующими важными свойствами.

Теорема I. *Определитель матрицы, соответствующей некоторому вектору, равен скалярному квадрату этого вектора с обратным знаком.*

Теорема II. *Квадрат матрицы X, соответствующей некоторому вектору, равен единичной матрице, умноженной на скалярный квадрат вектора.*

В самом деле,

$$X^2 = \begin{pmatrix} x_3^2 + (x_1 - ix_2)(x_1 + ix_2), & x_3(x_1 - ix_2) - (x_1 - ix_2)x_3 \\ (x_1 + ix_2)x_3 - x_3(x_1 + ix_2), & (x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) + x_3^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & 0 \\ 0 & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Теорема III. *Скалярное произведение двух векторов $\vec{x}\vec{y}$ равно полусумме произведений XY и YX соответствующих матриц.*

В самом деле, если λ, μ — некоторые параметры, то

$$(\lambda X + \mu Y)^2 = \lambda^2 X^2 + \mu^2 Y^2 + \lambda\mu(XY + YX),$$

$$(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y})^2 = \lambda^2\vec{x}^2 + \mu^2\vec{y}^2 + 2\lambda\mu\,\vec{x}\vec{y},$$

откуда вытекает справедливость теоремы.

В частности, если построить матрицы, соответствующие векторам базиса

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

то квадраты этих матриц равны 1, а скалярное произведение каждой пары меняет знак при перестановке сомножителей:

$$H_1^2 = H_2^2 = H_3^2 = 1,$$

$$H_2H_3 = -H_3H_2, \quad H_3H_1 = -H_1H_3, \quad H_1H_2 = -H_2H_1.$$

56. Матрицы, соответствующие бивектору и тривектору. Рассмотрим бивектор, определяемый векторами $\vec{x}$, $\vec{y}$ с составляющими

$$x_2y_3 - x_3y_2, \quad x_3y_1 - x_1y_3, \quad x_1y_2 - x_2y_1.$$

Этому бивектору можно отнести матрицу

$$\frac{1}{2}(XY - YX) =$$

$$= \begin{pmatrix} i(x_1 y_2 - y_2 x_1) & i(x_2 y_3 - x_3 y_2) + x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ i(x_2 y_3 - x_3 y_2) - (x_3 y_1 - x_1 y_3) & -i(x_1 y_2 - x_2 y_1) \end{pmatrix}.$$

Отметим, что *эта матрица равна матрице, соответствующей векторному произведению двух данных векторов и умноженной на i.*

Если векторы взаимно перпендикулярны, то матрица, соответствующая бивектору, равна

$$XY = -YX.$$

Можно аналогично отнести тривектору, определяемому векторами $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, матрицу

$$\frac{1}{6}(XYZ + YZX + ZXY - YXZ - ZYX - XZY).$$

Если три вектора взаимно перпендикулярны, то эта матрица равна XYZ. Обозначая через $\vec{u}$ векторное произведение $[\vec{x}\vec{y}]$, имеем

$$XYZ = iUZ.$$

Но произведение UZ матриц, соответствующих двум векторам, лежащим на одной прямой, равно скалярному произведению этих векторов, которое в данном случае равно объему v тривектора. Таким образом, *матрица, соответствующая тривектору с алгебраическим объемом v, равна iv.* В частности,

$$H_1 H_2 H_3 = i,$$

как это показывает непосредственное вычисление.

57. Связь с теорией кватернионов. Не существует линейной зависимости с комплексными коэффициентами, не равными одновременно нулю, вида

$$a_0 + a_1 H_1 + a_2 H_2 + a_3 H_3 = 0.$$

Можно непосредственно проверить, что левая часть этого соотношения выражается матрицей

$$\begin{pmatrix} a_0+a_3, & a_1-ia_2 \\ a_1+ia_2, & a_0-a_3 \end{pmatrix}.$$

Отсюда вытекает, что каждая матрица 2-го порядка с комплексными коэффициентами единственным способом может быть разложена на сумму скаляра и вектора. Мы получаем систему гиперкомплексных чисел, не отличающуюся от системы кватернионов; достаточно положить

$$I_1=-iH_1, \quad I_2=-iH_2, \quad I_3=-iH_3,$$

и мы получим закон композиции:

$$I_1^2=I_2^2=I_3^2=-1, \quad I_2I_3=-I_3I_2=I_1,$$
$$I_3I_1=-I_1I_3=I_2, \quad I_1I_2=-I_2I_1=I_3.$$

В действительной области между матрицами 1, H_1, H_2, H_3, iH_1, iH_2, iH_3, i не существует линейной зависимости с вещественными коэффициентами, не равными одновременно нулю; эти матрицы образуют систему гиперкомплексных чисел с 8 единицами, построенную на совокупности вещественных чисел. Каждое число системы разлагается единственным способом на сумму вещественного скаляра, вещественного вектора, вещественного бивектора и вещественного тривектора.

III. Представление симметрий и вращений

58. Представление симметрий. Пусть $\vec{a}$ — единичный вектор; вектор $\vec{x}'$, симметричный вектору $\vec{x}$ относительно плоскости П, перпендикулярной к $\vec{a}$ и проведенной через начало, определяется соотношением (п. 9):

$$\vec{x}'=\vec{x}-2\vec{a}(\vec{x}\vec{a}),$$

или, переходя к соответствующим матрицам и замечая, что $A^2=1$, имеем:

$$X' = X - A(XA + AX) = -AXA. \tag{2}$$

Отсюда вытекает, что симметрия для бивектора, определенного двумя взаимно перпендикулярными векторами X, Y, определяется следующим образом:

$$X'Y' = AXYA,$$

откуда для матрицы U, соответствующей бивектору, имеем

$$U' = AUA. \tag{3}$$

Наконец, при применении симметрии к матрице, соответствующей тривектору, последняя только меняет знак.

59. Представление вращения. Так как каждое вращение является произведением двух симметрий A, B (п. 10), то результат применения вращения к вектору X и бивектору U выражается формулами

$$X' = BAXAB, \quad U' = BAUAB,$$

или

$$X' = SXS^{-1}, \quad U' = SUS^{-1}, \tag{4}$$

где $S = BA$.

Из формулы (3) можно вывести формулу Эйлера-Олинда-Родрига. Пусть L — единичный вектор, определяющий направление оси вращения, ϑ — угол поворота; скалярное произведение единичных векторов A, B равно $\cos\frac{\vartheta}{2}$, их векторное произведение, $\frac{1}{2}(AB - BA)$, равно $iL\sin\frac{\vartheta}{2}$. Отсюда имеем

$$BA = \cos\frac{\vartheta}{2} - iL\sin\frac{\vartheta}{2}, \quad AB = \cos\frac{\vartheta}{2} + iL\sin\frac{\vartheta}{2},$$

то есть

$$X' = \left(\cos\frac{\vartheta}{2} - iL\sin\frac{\vartheta}{2}\right)X\left(\cos\frac{\vartheta}{2} + iL\sin\frac{\vartheta}{2}\right). \tag{5}$$

Если обозначить через l_1, l_2, l_3 направляющие косинусы вектора L, то параметры Эйлера-Олинда-Родрига определяются следующими 4 формулами:

$$\rho=\cos\frac{\theta}{2},\quad \lambda=l_1\sin\frac{\theta}{2},\quad \mu=l_2\sin\frac{\theta}{2},\quad \nu=l_3\sin\frac{\theta}{2};$$

сумма квадратов этих величин равна 1.

60. Операции над спинорами. Вернемся к спинорам. Обозначим через ξ матрицу с двумя строками и одним столбцом, элементами которой являются ξ_0, ξ_1. Условимся относить симметрии относительно плоскости Π, ортогональной единичному вектору $\vec{a}$, преобразование

$$\xi'=A\xi. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что если $\vec{x}$ является изотропным вектором, которому соответствует спинор $\vec{\xi}$, то спинором, соответствующим изотропному вектору $\vec{x}'$, симметричному $\vec{x}$ относительно Π, является $\vec{\xi}'$ или произведение $\vec{\xi}'$ на скаляр. В самом деле, на основании уравнений (1), связывающих составляющие вектора $\vec{x}$ с составляющими $\vec{\xi}$, имеем $X\xi=0$; с другой стороны, из (2) и (5) получаем

$$X'\xi'=-(AXA)(A\xi)=-AX\xi=0;$$

таким образом, спинор, соответствующий вектору X', имеет вид $m\vec{\xi}$.

В частном случае, когда вектор $\vec{a}$ является вектором $\vec{e}_3$ базиса:

$$A=H_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

формула (6) дает

$$\xi'_0=\xi_0,\quad \xi'_1=-\xi_1;$$

спинор $\vec{\xi}'$ является действительно одним из спиноров, соответствующих вектору X', симметричному X. Чтобы убедиться, что это имеет место в общем случае, заметим, что преобразование

$\xi \to mA\xi$, повторенное два раза, должно дать спинор, соответствующий исходному изотропному вектору, то есть ξ или $-\xi$; таким образом $m^2 = +1$; но m изменяется непрерывно вместе с A, то есть оно постоянно. Итак, преобразование (6) действительно соответствует отражению.

Мы видим, что в применении к спинорам каждая симметрия распадается на две *), именно

$$\xi' = A\xi \text{ и } \xi' = -A\xi;$$

каждая из них характеризуется выбором единичного вектора, перпендикулярного к плоскости симметрии.

Каждое вращение, являясь произведением двух симметрий, также раздваивается. Результат применения вращения, являющегося произведением симметрий A и B, выражается формулой

$$\xi' = BA\xi; \tag{7}$$

вращение $-BA$, геометрически одинаковое с первым, дает преобразование

$$\xi' = -BA\xi.$$

IV. Произведение двух спиноров и его разложение на неприводимые части

Три одночлена ξ_0^2, $\xi_0\xi_1$, ξ_1^2 образуют тензор, эквивалентный вектору: в самом деле, они являются линейными независимыми комбинациями составляющих изотропного вектора, а изотропный вектор, рассматриваемый как тензор, эквивалентен вектору общего вида.

61. Матрица C. Рассмотрим теперь тензор $\xi_\alpha \xi'_\beta$ 4-го порядка — произведение двух спиноров $\vec{\xi}$, $\vec{\xi}'$ Чтобы изучить его, введем матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{8}$$

*) Значения $m = \pm i$ не применимы, как показывает приведенный выше пример с $A = H_3$. (*Прим. ред.*)

она имеет следующее замечательное свойство: каков бы ни был вектор X,

$$CX = -X^*C; \tag{9}$$

кроме того,

$$C^* = -C, \ CC^* = 1, \ C^2 = -1. \tag{10}$$

Тождество (9) проверяется подстановкой выражения для матрицы (п. 55); имеем:

$$CX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -x_3 \\ -x_3 & -x_1 + ix_2 \end{pmatrix},$$

$$X^*C = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 - ix_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}.$$

62. Тривектор и вектор, соответствующие двум спинорам. Рассмотрим два спинора $\vec{\xi}$ и $\vec{\xi}'$ и форму

$$\xi'^*C\xi;$$

при применении симметрии A эта форма на основании (6) и (9) преобразуется в

$$\xi'^*A^*CA\xi = -\xi'^*CA^2\xi = -\xi'^*C\xi,$$

то есть только изменяет свой знак. Она определяет, таким образом, тензор, эквивалентный тривектору, который инвариантен при вращении и меняет знак при отражении. Ее явное выражение следующее:

$$\xi'_0\xi_1 - \xi'_1\xi_0.$$

Эта величина, действительно, при применении линейного преобразования к обоим спинорам умножается на определитель подстановки, причем определитель преобразования A равен -1.

Рассмотрим теперь два спинора и произвольный вектор X и образуем форму

$$\xi'^*CX\xi;$$

при применении симметрии A она преобразуется на основании (2), (6) и (9) следующим образом:

$$-(\xi'^*A^*)C(AXA)(A\xi) = \xi'^*CX\xi,$$

то есть она инвариантна при вращениях и отражениях. Но это — билинейная форма составляющих x_1, x_2, x_3 вектора X и произведений $\xi_\alpha\xi'_\beta$. Отсюда следует (п. 27), что коэффициенты при x_1, x_2, x_3 определяют тензор; этот тензор эквивалентен вектору, так как сумма $x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$, где y_i — составляющие некоторого вектора, инвариантна также при каждом вращении и отражении, то есть рассматриваемый тензор эквивалентен тензору y_α. Определенный таким образом вектор имеет составляющие, симметричные относительно составляющих спиноров ξ и ξ', так как

$$\xi^*CX\xi'=\xi'^*X^*C^*\xi=-\xi'^*X^*C\xi=\xi'^*CX\xi;$$

равенство двух первых выражений вытекает из того, что скаляр не меняется при транспонировании. Получаем следующие выражения для составляющих рассматриваемого вектора:

$$\begin{aligned} y_1&=\xi'^*CH_1\xi=\xi'_0\xi_0-\xi'_1\xi_1,\\ y_2&=\xi'^*CH_2\xi=i\xi'_0\xi_0+i\xi'_1\xi_1,\\ y_3&=\xi'^*CH_3\xi=-\xi'_0\xi_1-\xi'_1\xi_0;\end{aligned}$$

при $\xi'=\xi$ получаем изотропный вектор, соответствующий спинору ξ; при $\xi'\neq\xi$ отметим, что скалярный квадрат вектора равен $(\xi'_0\xi_1-\xi'_1\xi_0)^2$.

Таким образом, *мы получили разложение тензора 4-го порядка* $\xi_\alpha\xi'_\beta$ $(\alpha, \beta=0, 1)$ *на вектор и тривектор, причем объем тривектора равен длине вектора.*

V. Случай вещественного эвклидова пространства

Полученные выше результаты применяются к области комплексных вращений и отражений. Теперь мы рассмотрим эвклидово пространство с вещественными вращениями и отражениями.

63. Сопряженные комплексные векторы. Матрицы X и Y, соответствующие двум комплексно сопряженным векторам

$$X=\begin{pmatrix} x_3 & x_1-ix_2\\ x_1+ix_2 & -x_3\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix} \bar{x}_3 & \bar{x}_1-i\bar{x}_2\\ \bar{x}_1+i\bar{x}_2 & -\bar{x}_3\end{pmatrix},$$

удовлетворяют соотношению

$$Y = \overline{X}^*, \text{ то есть } \overline{Y} = X^*; \qquad (11)$$

в частности, если вектор вещественный, то $\overline{X} = X^*$, откуда вытекает

Теорема I. *Матрица, соответствующая вещественному вектору, эрмитова.*

Так как матрица U, соответствующая вещественному бивектору, равна матрице, соответствующей вещественному вектору, умноженной на i, то она не эрмитова; имеет место соотношение

$$\overline{U} = -U^*.$$

Каждое вращение определяется матрицей $S = BA$ — произведением матриц, соответствующих двум вещественным единичным векторам; следовательно,

$$\overline{S}^* = \overline{A}^*\overline{B}^* = AB = (BA)^{-1} = S^{-1},$$

откуда

Теорема II. *Каждое вращение определяется унитарной унимодулярной матрицей, каждое отражение — унитарной матрицей с определителем, равным* —1.

64. Сопряженные спиноры. Пусть X — изотропный вектор, ξ — один из соответствующих ему спиноров; имеем $X\xi = 0$. Отсюда следует

$$C\overline{X}\overline{\xi} = 0,$$

но на основании (9) и (11)

$$0 = C\overline{X}\overline{\xi} = -\overline{X}^*C\overline{\xi} = -YC\overline{\xi},$$

где Y — комплексный вектор, сопряженный с X. Следовательно, каждый из спиноров, соответствующих Y, имеет вид $mC\overline{\xi}$; нетрудно проверить, что коэффициент m равен $\pm i$.

Условимся называть спинором, сопряженным с ξ, ***величину*** $iC\overline{\xi}$. *Операция сопряжения, определенная таким образом, не инволюторна,* так как при двукратном применении она переводит спинор ξ в $-\xi$.

Важно отметить, что спинор $iC\bar{\xi}$ в действительности имеет природу, отличную от ξ, так как при применении симметрии A матрица $iC\bar{\xi}$ дает

$$iC\overline{A\xi} = iCA^*\bar{\xi} = -iA(C\bar{\xi});$$

она умножается слева на $-A$, а не на A. Мы будем называть величину, сопряженную спинору, *спинором второго рода.*

65. Скаляр и бивектор, соответствующие двум сопряженным спинорам. Если в произведении двух спиноров ξ, ξ' мы заменим ξ' на спинор второго рода, сопряженный с ξ, или на $C\bar{\xi}$, то получим тензор, разлагающийся на две неприводимых части. Одна определяется формой

$$(\bar{\xi}^* C^*)\, C\bar{\xi} = \bar{\xi}^*\xi = \xi_0\bar{\xi}_0 + \xi_1\bar{\xi}_1;$$

это — скаляр, инвариантный при каждом вращении и отражении; в самом деле, мы видели (п. 63), что каждое вращение и каждое отражение определяются унитарными матрицами. Другая неприводимая часть определяется формой

$$(\bar{\xi}^* C^*)\, CX\xi = \bar{\xi}^* X\xi = (x_1 + ix_2)\,\xi_0\bar{\xi}_1 + (x_1 - ix_2)\,\xi_1\bar{\xi}_0 +$$
$$+ x_3(\xi_0\bar{\xi}_0 - \xi_1\bar{\xi}_1);$$

коэффициенты при x_1, x_2, x_3 образуют *бивектор.* В самом деле, при вещественной симметрии A величина $\bar{\xi}^* X\xi$ преобразуется в

$$-(\bar{\xi}^*\bar{A})(AXA)(A\xi) = -\bar{\xi}^* X\xi:$$

она инвариантна при вращении и меняет знак при отражении; следовательно, она эквивалентна тривектору; но величина

$$x_1y_{23} + x_2y_{31} + x_3y_{12},$$

где y_{23}, y_{31}, y_{12} — составляющие бивектора, есть тривектор. Следовательно (п. 27, теорема II), *три величины*

$$\xi_0\bar{\xi}_1 + \xi_1\bar{\xi}_0, \quad i(\xi_0\bar{\xi}_1 - \xi_1\bar{\xi}_0), \quad \xi_0\bar{\xi}_0 - \xi_1\bar{\xi}_1$$

являются составляющими бивектора. Что они являются составляющими вектора, следует непосредственно из того, что при симметрии относительно начала они остаются инвариантными, так как ξ_0 и ξ_1 при этом преобразовании умножаются на i.

VI. Случай псевдоэвклидова пространства

66. Вещественные вращения. Мы получаем вещественное псевдоэвклидово пространство, заменяя всюду x_2 на ix_2 и считая новые координаты x_1, x_2, x_3 вещественными. Матрица, соответствующая вещественному вектору, вещественна:

$$X = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 & -x_3 \end{pmatrix}.$$

Изотропному вектору (вектору скорости света) с положительной временно́й составляющей ($x_2 > 0$) соответствуют два спинора с вещественными составляющими:

$$x_1 = \xi_0^2 - \xi_1^2, \quad x_2 = \xi_0^2 + \xi_1^2, \quad x_3 = -2\xi_0\xi_1.$$

Спинором, сопряженным спинору ξ, является $\bar{\xi}$; он той же природы, что и ξ.

Форма $\bar{\xi}^* C\xi$ определяет тривектор $\bar{\xi}_0\xi_1 - \bar{\xi}_1\xi_0$. Форма $\bar{\xi}^* CX\xi$ определяет вещественный вектор

$$y_1 = \xi_0\bar{\xi}_1 - \xi_1\bar{\xi}_1, \quad y_2 = \xi_0\bar{\xi}_0 + \xi_1\bar{\xi}_1, \quad y_3 = -(\xi_0\bar{\xi}_1 + \xi_1\bar{\xi}_0);$$

это — *временно́й вектор*, длина которого равна $i(\xi_0\bar{\xi}_1 - \xi_1\bar{\xi}_0)$; он изотропен, если спинор ξ вещественный.

Наконец, *собственные* вращения представляются вещественными унимодулярными матрицами, *собственные* отражения — вещественными матрицами с определителем, равным -1.

ГЛАВА IV

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ В E_3

I. Линейные представления, выражаемые при помощи спиноров

Мы укажем простой метод построения в эвклидовом комплексном или вещественном пространстве трех измерений неограниченной совокупности неприводимых линейных представлений группы вращений и группы вращений и отражений. В дальнейшем мы увидим, что не существует других представлений, по крайней мере в вещественном пространстве, и что, кроме того, каждое линейное представление этих групп вполне приводимо. На основании теоремы, приводимой ниже, каждое линейное представление любой из рассматриваемых вещественных групп дает линейное представление соответствующей комплексной группы, и оба эти представления одновременно приводимы или неприводимы.

67. Представление $D_{\frac{p}{2}}$ и его производящий полином.

Рассмотрим спинор (ξ_0, ξ_1). Совокупность однородных полиномов степени p от ξ_0 и ξ_1 образует тензор и дает линейное представление группы вращений. Можно символически представить этот тензор при помощи производящего полинома $(a\xi_0 + b\xi_1)^p$, где a и b — произвольные параметры; это надо понимать так, что коэффициенты при различных одночленах, образованных из a и b в этом полиноме, взятом в развернутом виде, определяют составляющие тензора. Мы будем обозначать этот тензор или соответствующее линейное представление символом $D_{\frac{p}{2}}$.

Теорема. *Представление $D_{\frac{p}{2}}$ неприводимо.*

Достаточно доказать эту теорему для группы комплексных вращений. Рассмотрим преобразование

$$\xi_0' = \xi_0 e^{i\frac{\theta}{2}}, \quad \xi_1' = \xi_1 e^{-i\frac{\theta}{2}},$$

определяющее вращение на вещественный угол ϑ вокруг оси x_3. При этом преобразовании одночлен $\xi_0^\alpha \xi_1^\beta$ получает множитель $e^{i(\alpha-\beta)\frac{\vartheta}{2}}$. Если ϑ не имеет специально подобранного частного значения, множители, соответствующие разным составляющим $\xi_0^\alpha \xi_1^\beta$ тензора, все различны между собой. Предположим, что представление $D_{\frac{p}{2}}$ приводимо. Тогда существовал бы тензор $\mathfrak{T}$, образованный при помощи $q < p+1$ целых полиномов порядка p от ξ_0, ξ_1; пусть

$$A_0 \xi_0^p + A_1 \xi_0^{p-1} \xi_1 + \ldots + A_p \xi_1^p$$

— один из этих полиномов; рассматриваемое вращение преобразует его в

$$A_0 e^{i\frac{p}{2}\vartheta} \xi_0^p + A_1 e^{i\left(\frac{p}{2}-1\right)\vartheta} \xi_0^{p-1} \xi_1 + \ldots + A_p e^{-i\frac{p}{2}\vartheta} \xi_1^p;$$

повторяя p раз эту операцию, мы получим $p+1$ независимых линейных комбинаций от

$$A_0 \xi_0^p, \quad A_1 \xi_0^{p-1} \xi_1, \quad A_2 \xi_0^{p-2} \xi_1^2, \ldots, A_p \xi_1^p.$$

Отсюда следует, что существует, по крайней мере, один одночлен $\xi_0^h \xi_1^k$ $(h+k=p)$, входящий в состав тензора $\mathfrak{T}$, и что, следовательно, все полиномы $(\alpha\xi_0 + \beta\xi_1)^h (\gamma\xi_0 + \delta\xi_1)^k$ (где $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$) также входят в $\mathfrak{T}$. Если предположить, что четыре постоянных α, β, γ, δ не равны нулю, мы получим, что коэффициент при ξ_0^p в соответствующем полиноме не равен нулю. Таким образом, тензор $\mathfrak{T}$ содержит ξ_0^p, то есть и $(\alpha\xi_0 + \beta\xi_1)^p$, следовательно, и все одночлены $\xi_0^h \xi_1^k$.

При $p=0$ полученный тензор 1-го порядка является скаляром; при $p=1$ мы имеем *спинор*, при $p=2$ — *вектор*; в самом деле, величины ξ_0^2, $\xi_0\xi_1$, ξ_1^2 дают преобразование составляющих вектора, если от них взять соответствующие линейные комбинации.

Существует другое представление $(p+1)$-го порядка группы вращений и *отражений*; оно получается при помощи тех же составляющих, но в предположении, что при отражении эти составляющие преобразуются с помощью рассмотренной выше подстановки вместе с изменением знаков у всех составляющих. Будем обозначать это новое представление символом $D^-_{\frac{p}{2}}$ в отличие от предыдущего, которое условимся обозначать $D^+_{\frac{p}{2}}$; на основании сделанного выше соображения оно не эквивалентно первому. $D^-_{\frac{1}{2}}$ относится к спинору второго рода, D^-_1 — к бивектору, D^-_0 — к тривектору (т. е. $\xi_0\xi'_1 - \xi_1\xi'_0$). За производящий полином представления $D^-_{\frac{p}{2}}$ можно выбрать выражение

$$(\xi_0\xi'_1 - \xi_1\xi'_0)(a\xi_0 + b\xi_1)^p.$$

68. Разложение $D_i \times D_j$. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_{2i+1}$ и $v_1, v_2, \ldots, v_{2j+1}$ — переменные представлений D_i и D_j. Произведения $u_\alpha v_\beta$ приводят к новому линейному представлению порядка $(2i+1)(2j+1)$, которое мы будем обозначать через $D_i \times D_j$. В общем случае это представление приводимо, и мы разложим его на неприводимые представления.

Заметим прежде всего, что если ξ и ξ' — два произвольных спинора, то производящие полиномы

$$P = (a\xi_0 + b\xi_1)^p (a\xi'_0 + b\xi'_1)^q,$$

$$Q = (a\xi_0 + b\xi_1)^p (a\xi_0 + b\xi_1)^q = (a\xi_0 + b\xi_1)^{p+q}$$

определяют эквивалентные представления; это вытекает из того, что коэффициенты при различных одночленах $a^\alpha b^\beta$ в этих полиномах преобразуются одинаковым образом при каждом вращении и отражении, так как ξ'_0 и ξ'_1 преобразуются так же, как ξ_0 и ξ_1.

На основании сделанного замечания можно выбрать за составляющие тензора $D_{\frac{p}{2}} \times D_{\frac{q}{2}}$ полиномы от $\xi_0, \xi_1, \xi'_0, \xi'_1$ степени p

относительно ξ_0, ξ_1 и q относительно ξ'_0, ξ'_1. Рассмотрим полиномы

$$\Phi_0 \equiv (a\xi_0 + b\xi_1)^p (a\xi'_0 + b\xi'_1)^q,$$
$$\Phi_1 \equiv (\xi_0\xi'_1 - \xi_1\xi'_0)(a\xi_0 + b\xi_1)^{p-1}(a\xi'_0 + b\xi'_1)^{q-1},$$
$$\Phi_2 \equiv (\xi_0\xi'_1 - \xi_1\xi'_0)^2 (a\xi_0 + b\xi_1)^{p-2}(a\xi'_0 + b\xi'_1)^{q-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Phi_q \equiv (\xi_0\xi'_1 - \xi_1\xi'_0)^q (a\xi_0 + b\xi_1)^{p-q},$$

предполагая $p \geqslant q$. Каждый из них определяет линейное неприводимое представление, именно

$$D^+_{\frac{p+q}{2}}, \quad D^-_{\frac{p+q}{2}-1}, \quad D^+_{\frac{p+q}{2}-2}, \ldots, D^{\pm}_{\frac{p-q}{2}};$$

последнее имеет знак $+$ или $-$, в зависимости от четности или нечетности числа q.

Составляющие каждого из этих представлений являются составляющими рассматриваемого представления. Число этих составляющих равно

$$(p+q+1)+(p+q-1)+(p+q-3)+\ldots+(p-q+1) =$$
$$= (q+1)(p+q+1) - q(q+1) = (p+1)(q+1),$$

а это есть как раз порядок данного представления. Эти составляющие линейно независимы: в противном случае в приводимом тензоре, определяемом $q+1$ найденными неприводимыми тензорами, по крайней мере, один из этих тензоров имел бы все свои составляющие равными нулю (п. **34**), а это не имеет места. Следовательно, имеем теорему:

Теорема. *Произведение двух линейных неприводимых представлений* $D^+_{\frac{p}{2}}$, $D^+_{\frac{q}{2}}$ *вполне приводимо и разлагается на неприводимые представления:*

$$D^+_{\frac{p+q}{2}}, \quad D^-_{\frac{p+q}{2}-1}, \quad D^+_{\frac{p+q}{2}-2}, \ldots, D^{\pm}_{\frac{p-q}{2}}.$$

69. Частные случаи. Гармонические полиномы. Случай представлений D_i, для которых индекс i есть целое число ($p = 2i$), рассмотрим особо. Для $i = 1$ производящий полином

$$(a\xi_0 + b\xi_1)^2 = a^2\xi_0^2 + 2ab\xi_0\xi_1 + b^2\xi_1^2$$

может быть заменен другим, линейным относительно составляющих x_1, x_2, x_3 вектора. В самом деле, имеем

$$\xi_0^2 \sim -x_1 + ix_2, \quad \xi_0\xi_1 \sim x_3, \quad \xi_1^2 \sim x_1 + ix_2,$$

где знак $\sim$ обозначает, что левые части этих соотношений преобразуются, как соответствующие правые; следовательно, за производящий полином тензора D_1 можно взять

$$(b^2 - a^2)\, x_1 + i\,(b^2 + a^2)\, x_2 + 2abx_3.$$

Таким образом, за производящий полином тензора D_p можно принять

$$F_p \equiv [(b^2 - a^2)\, x_1 + i\,(b^2 + a^2)\, x_2 + 2abx_3]^p.$$

Соответствующий тензор имеет в качестве составляющих $2p + 1$ однородных полиномов порядка p от x_1, x_2, x_3; это — *гармонические полиномы*. В самом деле, непосредственное вычисление показывает, что

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} = 0.$$

Произведение $D_1^+ \times D_1^+$, то есть произведение двух векторов, разлагается на три неприводимых представления D_2^+, D_1^- и D_0^+. Первое дает тензор

$$x_1x_1' - x_3x_3', \quad x_2x_2' - x_3x_3',$$
$$x_2x_3' + x_3x_2', \quad x_3x_1' + x_1x_3', \quad x_1x_2' + x_2x_1',$$

эквивалентный тензору

$$x_1^2 - x_3^2, \quad x_2^2 - x_3^2, \quad 2x_2x_3, \quad 2x_3x_1, \quad 2x_1x_2,$$

определяемому гармоническими полиномами второго порядка;

второе представление дает бивектор

$$x_2x'_3 - x_3x'_2, \quad x_3x'_1 - x_1x'_3, \quad x_1x'_2 - x_2x'_1;$$

наконец, третье — скаляр

$$x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3.$$

70. Приложения. Рассмотрим векторное поле V_1, V_2, V_3; каждой точке (x_1, x_2, x_3) пространства отнесен вектор с составляющими V_1, V_2, V_3, являющимися заданными функциями от (x_1, x_2, x_3). При движении или отражении величины $\frac{\partial V_i}{\partial x_j}$ преобразуются, как произведения составляющих двух векторов с началом в точке O:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \text{ и } V_1, \ V_2, \ V_3.$$

Определим все линейные соотношения с постоянными коэффициентами между $\frac{\partial V_i}{\partial x_j}$, которые остаются инвариантными при движениях. Мы должны, следовательно, выполнить разложение произведения двух векторов (символических) и приравнять нулю составляющие одного или нескольких неприводимых тензоров, дающих это разложение. Беря один из этих тензоров, мы получим одну из следующих систем:

a) $$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} = \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = \frac{\partial V_3}{\partial x_3},$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial V_3}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} = 0;$$

b) $$\frac{\partial V_2}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial V_3}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial V_1}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_1} = 0;$$

c) $$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0.$$

Случай c) дает векторные соленоидальные поля (с нулевой дивергенцией); случай b) — потенциальные (безвихревые) поля; случай a) — поле скоростей движения конформно изменяемого тела.

Если бы мы рассматривали группу движений в собственном смысле (без отражений), то система

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_3}-\frac{\partial V_3}{\partial x_2}=mV_1,\quad \frac{\partial V_3}{\partial x_1}-\frac{\partial V_1}{\partial x_3}=mV_2,\quad \frac{\partial V_1}{\partial x_2}-\frac{\partial V_2}{\partial x_1}=mV_3,$$

где m — некоторая постоянная, была бы также инвариантной; при движении, сопровождаемом симметрией, она преобразуется в аналогичную систему, причем постоянная m заменяется на $-m$. Дивергенция векторного поля, удовлетворяющего этой системе, равна нулю.

71. Уравнения Дирака. Аналогично можно исследовать тензор $\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x_i},\ \frac{\partial\xi_1}{\partial x_i}\right)$, который преобразуется при движении как произведение вектора $\frac{\partial}{\partial x}$ на спинор ξ. Но

$$D_1^+\times D_{\frac{1}{2}}^+=D_{\frac{3}{2}}^+ + D_{\frac{1}{2}}^-\,.$$

Производящий полином тензора $D_1^+\times D_{\frac{1}{2}}^+$ есть

$$(a\xi_0'+b\xi_1')^2(a'\xi_0+b'\xi_1),$$

производящий полином тензора $D_{\frac{3}{2}}^+$ равен

$$(a\xi_0'+b\xi_1')^2(a\xi_0+b\xi_1)\sim$$

$$\sim\left((b^2-a^2)\frac{\partial}{\partial x_1}+i(b^2+a^2)\frac{\partial}{\partial x_2}+2ab\frac{\partial}{\partial x_3}\right)(a\xi_0+b\xi_1)\sim$$

$$\sim -a^3\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x_1}-i\frac{\partial\xi_0}{\partial x_2}\right)+a^2b\left(2\frac{\partial\xi_0}{\partial x_3}-\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}+i\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}\right)+$$

$$+ab^2\left(2\frac{\partial\xi_1}{\partial x_3}+\frac{\partial\xi_0}{\partial x_1}+i\frac{\partial\xi_0}{\partial x_2}\right)+b^3\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}+i\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}\right);$$

производящим полиномом $D_{\frac{1}{2}}^-$ является

$$(\xi_0'\xi_1-\xi_1'\xi_0)(a\xi_0'+b\xi_1')=$$

$$=a(-\xi_0'\xi_1'\xi_0+\xi_0'^2\xi_1)+b(-\xi_1'^2\xi_0+\xi_0'\xi_1'\xi_1)\sim$$

$$\sim a\left(-\frac{\partial\xi_0}{\partial x_3}-\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}+i\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}\right)+b\left(-\frac{\partial\xi_0}{\partial x_1}-i\frac{\partial\xi_0}{\partial x_2}+\frac{\partial\xi_1}{\partial x_3}\right).$$

Приравнивая нулю составляющие тензора $D^{-}_{\frac{1}{2}}$, получаем *уравнения типа Дирака*:

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial x_3}+\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}-i\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}=0,$$

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial x_1}+i\frac{\partial\xi_0}{\partial x_2}-\frac{\partial\xi_1}{\partial x_3}=0;$$

это — наиболее простые уравнения этого типа.

Уравнения:

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial x_3}+\frac{\partial\xi_0}{\partial x_1}-i\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}=m\dot{\xi}_0,$$

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial x_1}+i\frac{\partial\xi_0}{\partial x_2}-\frac{\partial\xi_1}{\partial x_3}=m\dot{\xi}_1$$

остаются инвариантными при движении, так как спиноры первого и второго рода $D^{+}_{\frac{1}{2}}$ и $D^{-}_{\frac{1}{2}}$ преобразуются одинаково при вращении; при симметрии эти уравнения не изменяют своей формы, только постоянная m меняет знак.

Отметим, что уравнения Дирака в символической форме могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\xi=0,$$

где $\frac{\partial}{\partial x}$ — матрица, соответствующая вектору $\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_2}$, $\frac{\partial}{\partial x_3}$. При умножении слева на $\frac{\partial}{\partial x}$ мы получаем $\left(\text{так как квадрат } \frac{\partial}{\partial x} \text{ равен } \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)$ уравнения

$$\Delta\xi_0=0 \qquad \Delta\xi_1=0.$$

Уравнения, получающиеся приравниванием нулю составляющих тензора $D^{+}_{\frac{3}{2}}$,

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial x_1}-i\frac{\partial\xi_0}{\partial x_2}=0, \qquad \frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}+i\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}=0,$$

$$2\frac{\partial\xi_0}{\partial x_3}-\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}=0, \quad 2\frac{\partial\xi_1}{\partial x_3}+\frac{\partial\xi_0}{\partial x_1}+i\frac{\partial\xi_0}{\partial x_2}=0,$$

дают:

$$\xi_0 = b(-x_1 + ix_2) + ax_3 + h, \quad \xi_1 = a(x_1 + ix_2) + bx_3 + k,$$

где a, b, h, k — некоторые произвольные постоянные.

II. Бесконечно малые вращения и определение эвклидовых тензоров

72. Бесконечно малые вращения пространства E_3. Мы приступаем теперь к отысканию всех линейных представлений группы вращений. Мы уже рассматривали выше (п. 19) бесконечно малые вращения, которые определяют поля скоростей при движении твердого тела вокруг неподвижной точки. Наиболее общее бесконечно малое вращение, примененное к вектору x_1, x_2, x_3, определяется матрицей третьего порядка, являющейся линейной комбинацией с комплексными или вещественными коэффициентами трех матриц базиса, например тех, которые определяют вращения с единичной угловой скоростью вокруг координатных осей; этими тремя матрицами являются

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В применении к спинорам вращения дают аналогичные матрицы. Вращение на угол ϑ около вектора $\vec{e}_3$ определяется, как мы видели выше (п. 59), матрицей

$$\cos\frac{\vartheta}{2} - iH_3 \sin\frac{\vartheta}{2} = 1 - \frac{i}{2}\vartheta H_3 + \ldots$$

Вращение с угловой скоростью, равной 1, определяется, таким образом, матрицей $-\frac{1}{2} iH_3$. Имеем, следовательно, три матрицы базиса

$$-\frac{1}{2} iH_1 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad -\frac{1}{2} iH_2 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$-\frac{1}{2} iH_3 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

73. Точное определение изучаемых ниже представлений. Рассмотрим теперь какое-нибудь линейное представление группы вращений, однозначное или не однозначное. Необходимо дать точное определение того, что мы подразумеваем под этим понятием.

Зададим в группе вращений достаточно малую окрестность тождественного преобразования, например, совокупность вращений на угол, меньший некоторого фиксированного угла $\alpha \leqslant \pi$. Каждому вращению $\mathfrak{R}$ в этой окрестности отнесем одну и только одну матрицу S данного порядка, которая удовлетворяет следующим условиям:

1° элементы матрицы S являются непрерывными функциями параметров, от которых зависит $\mathfrak{R}$;

2° если $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ и $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ принадлежат к данной окрестности, то произведение SS' матриц, соответствующих вращениям $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$, равно матрице, соответствующей вращению $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$.

Каждое вращение на произвольный угол может быть получено как произведение конечного числа вращений из данной окрестности; поставим ему в соответствие матрицу, получающуюся как произведение матриц, соответствующих этим различным вращениям. Мы получаем, таким образом, то, что будем называть представлением группы вращений. Относящиеся к спинорам матрицы, которые мы поставили в соответствие с различными вращениями, удовлетворяют формулированным выше условиям (угол α равен π).

Неоднозначность представления выражается в том, что матрица, изменяясь непрерывно в зависимости от непрерывного изменения соответствующего вращения, может не принимать исходного значения, когда соответствующее вращение возвращается к исходному.

74. Основная теорема. Линейные преобразования, соответствующие некоторому линейному представлению, образуют линейную группу, обладающую тем свойством, что элементы представляющих матриц являются непрерывными функциями параметров, от которых они зависят (*непрерывную линейную группу*). Имеет место следующая основная теорема [1]):

[1]) Эта теорема принадлежит J. Von Neumann'у; она является частным случаем более общей теоремы Картана (*La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs*. Mém. Sc. Math., XLII, 1930, § 26, стр. 22).

Теорема. *Каждая непрерывная линейная группа может быть образована при помощи бесконечных малых преобразований.*

Эта теорема выражает в том случае, которым мы занимаемся, в частности, следующий факт: если вращение $\mathfrak{R}$ происходит вокруг оси $\vec{e}_l$, причем угол поворота $\vartheta_l < a$, то соответствующая матрица обладает тем свойством, что $\frac{S-1}{\vartheta_l}$ стремится при $\vartheta_l \to 0$ к определенной матрице R_l, представляющей бесконечно малое вращение вокруг оси $\vec{e}_l$, с единичной угловой скоростью. В общем случае бесконечно малое вращение с единичной угловой скоростью вокруг оси, определяемой направляющими косинусами α, β, γ, представляется матрицей

$$\alpha R_1 + \beta R_2 + \gamma R_3.$$

Наконец, если мы возьмем непрерывную последовательность вращений, зависящих от параметра t, и применим к переменным u_i рассматриваемого линейного представления эту непрерывную последовательность вращений, то переменные u_i будут удовлетворять системе линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{du}{dt} = p^1(t) R_1 u + p^2(t) R_2 u + p^3(t) R_3 u.$$

Отсюда вытекает, что, зная матрицы R_1, R_2, R_3, мы можем определить матрицы S при помощи интегрирования линейных дифференциальных уравнений. Более точно, мы интегрируем уравнения

$$\frac{du}{dt} = \alpha R_1 u + \beta R_2 u + \gamma R_3 u,$$

где α, β, γ — три параметрических направляющих косинуса; выражения, определяющие в пространстве линейного представления вектор u в функции от t и его значения u_0, дают для всех достаточно малых значений t линейные преобразования, элементы которых являются аналитическими функциями от αt, βt, γt; эти преобразования соответствуют вращению на угол t вокруг оси (α, β, γ). Затем мы дополняем представление так, как было указано выше.

75. Представления группы вещественных вращений и аналитические представления группы комплексных вращений. В случае вещественных вращений в эвклидовом вещественном пространстве параметры αt, βt, γt вещественны. В вещественном псевдоэвклидовом пространстве следует взять линейную комбинацию с вещественными коэффициентами трех матриц, соответствующих трем линейно независимым бесконечно малым вращениям. Наконец, в случае комплексных вращений мы придадим αt, βt, γt произвольные комплексные значения.

Отсюда выводим следующую теорему:

Теорема. *Каждое линейное представление группы вещественных вращений дает линейное представление группы комплексных вращений.*

Достаточно подставить в элементах матриц представления, являющихся аналитическими функциями от вещественных параметров вещественного вращения, вместо этих вещественных параметров комплексные; будем говорить, что второе представление (группы комплексных вращений) получается из первого (группы вещественных вращений) *переходом из вещественной области в комплексную.* Полученные представления группы комплексных вращений называются *аналитическими*; существуют, как увидим ниже, представления *не аналитические* (п.п. 82—84).

Наконец, переход из действительной области в комплексную сохраняет характер неприводимости линейного представления, так как, если бы аналитическое представление комплексной группы было приводимо, то представление вещественной группы, являющейся ее подгруппой, было бы также приводимо.

Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между:

1° неприводимыми аналитическими представлениями группы комплексных вращений,

2° неприводимыми представлениями группы вещественных вращений в вещественном эвклидовом пространстве,

3° неприводимыми представлениями группы собственных вещественных вращений в вещественном псевдоэвклидовом пространстве.

В этом последнем случае необходимо ограничиться случаем собственных вращений, так как совокупность всех вращений не образует непрерывной группы.

76. Уравнения структуры. Между матрицами R_1, R_2, R_3, определяющими бесконечно малые вращения в любом линейном представлении, существуют некоторые соотношения, которые мы сейчас и установим.

Рассмотрим для этого два семейства вращений, из которых каждое зависит аналитически от одного параметра, причем вращение приводится к тождественному вращению, когда параметр равен нулю.

Пусть $s(u)$ и $s(v)$ — соответствующие матрицы, определяющие вращения векторов. Для простоты предположим, что первое вращение происходит на угол u вокруг оси (α, β, γ), второе — на угол v вокруг оси $(\alpha', \beta', \gamma')$. Построим вращение

$$s = s(u)\, s(v)\, s(-u)\, s(-v);$$

эту матрицу можно разложить по степеням u и v; она равна 1 для $u = v = 0$. С другой стороны, она равна 1 при $v = 0$ или $u = 0$; следовательно, все члены разложения, кроме первого, будут содержать множитель uv; главная часть матрицы $s - 1$ имеет вид $uv\rho$, где ρ — матрица, определяющая бесконечно малое вращение. Чтобы получить эту матрицу ρ, достаточно разложить произведение $s(u)\, s(v)\, s(-u)\, s(-v)$, ограничиваясь в каждом множителе членом первого порядка. Пусть

$$s(u) = 1 + u\rho_1, \quad s(v) = 1 + v\rho_2, \quad s(-u) = 1 - u\rho_1,$$
$$s(-v) = 1 - v\rho_2,$$

тогда

$$s = 1 + uv(\rho_1\rho_2 - \rho_2\rho_1) + \ldots$$

Таким образом, приходим к следующей теореме:

Если ρ_1 и ρ_2 — матрицы, определяющие два бесконечно малых вращения векторов, то матрица $\rho_1\rho_2 - \rho_2\rho_1$ соответствует также бесконечно малому вращению.

Важно отметить следующий факт: если взять произвольное линейное представление группы вращений, то на основании того рассуждения, при помощи которого мы пришли к матрице $\rho_1\rho_2 - \rho_2\rho_1$, можно утверждать, что бесконечно малому вращению $\rho_1\rho_2 - \rho_2\rho_1$ соответствует в линейном представлении матрица $R_1R_2 - R_2R_1$, если R_1 и R_2 — матрицы, соответствующие ρ_1 и ρ_2.

В частности, *если R_1, R_2, R_3 — матрицы, определяющие бесконечно малые вращения базиса линейного представления, то матрицы $R_2R_3 - R_3R_2$, $R_3R_1 - R_1R_3$, $R_1R_2 - R_2R_1$ являются линейными комбинациями R_1, R_2, R_3, причем коэффициенты в этих линейных комбинациях одни и те же для всех линейных представлений группы вращений.*

Рассмотрим, в частности, группу спиноров, для которой

$$R_1 = -\frac{1}{2}iH_1, \quad R_2 = -\frac{1}{2}iH_2, \quad R_3 = -\frac{1}{2}iH_3;$$

имеем

$$R_1R_2 - R_2R_1 = -\frac{1}{4}(H_1H_2 - H_2H_1) = -\frac{1}{2}H_1H_2 = -\frac{1}{2}iH_3 = R_3$$

и два аналогичных соотношения, откуда вытекает

Теорема. *Матрицы R_1, R_2, R_3, определяющие в некотором линейном представлении группы вращений вращения с единичной угловой скоростью вокруг координатных осей, удовлетворяют соотношениям структуры:*

$$R_2R_3 - R_3R_2 = R_1, \qquad R_3R_1 - R_1R_3 = R_2, \qquad R_1R_2 - R_2R_1 = R_3.$$

Нетрудно проверить эти соотношения на матрицах, применяемых к векторам:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта теорема допускает обращение, которое является частным случаем *второй основной теоремы* теории групп Ли, но ею мы не будем пользоваться в дальнейшем.

77. Неприводимые представления группы вращений. Перейдем теперь к определению линейных представлений группы вращений.

Вместо неизвестных матриц R_1, R_2, R_3 мы возьмем три линейных комбинации

$$\left.\begin{aligned} A &= R_1 - iR_2, \\ B &= \frac{1}{2}(R_1 + iR_2), \\ C &= iR_3; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

получаем новые соотношения структуры

$$AB - BA = C, \quad AC - CA = A, \quad BC - CB = -B. \tag{2}$$

Определим сначала все неприводимые представления. Пусть λ — собственное значение матрицы C; в пространстве представления существует вектор u, удовлетворяющий соотношению $Cu = \lambda u$; мы будем говорить, что он принадлежит собственному значению λ. Уравнения (2) дают

$$CAu = (\lambda - 1) Au, \quad CBu = (\lambda + 1) Bu,$$

то есть, если вектор Au не равен нулю, матрица C имеет собственное значение $\lambda - 1$, и если Bu не равен нулю, матрица C имеет собственное значение $\lambda + 1$.

Предположим, что собственное значение матрицы λ выбрано так, что $\lambda + 1$ не является уже собственным ее значением.

Тогда $Bu = 0$. Из соотношений

$$Cu = \lambda u, \qquad Bu = 0$$

выводим, применяя к вектору u соотношения (2),

$$CAu = (\lambda - 1) Au, \quad BAu = -\lambda u;$$

затем, применяя те же соотношения к Au, A^2u, A^3u и т. д., имеем:

$$CA^2u = (\lambda - 2) A^2u, \quad BA^2u = (1 - 2\lambda) Au,$$

$$CA^3u = (\lambda - 3) A^3u, \quad BA^3u = (3 - 3\lambda) A^2u,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$CA^pu = (\lambda - p) A^pu, \quad BA^pu = p\left(\frac{p-1}{2} - \lambda\right) A^{p-1}u.$$

Так как число независимых векторов ограничено, существует такое целое число p, что A^{p+1} является линейной комбинацией $u, Au, \ldots, A^pu$. Предположим, что p — наименьшее число, обладающее этим свойством, и пусть

$$A^{p+1}u = \alpha_0 u + \alpha_1 Au + \alpha_2 A^2u + \ldots + \alpha_p A^pu;$$

умножая это равенство слева на B, получим аналогичное соотношение:

$$(p+1)\left(\frac{p}{2} - \lambda\right) A^pu = -\alpha_1 \lambda u + \alpha_2 (1 - 2\lambda) Au + \ldots +$$
$$+ \alpha_p p \left(\frac{p-1}{2} - \lambda\right) A^{p-1}u.$$

Это соотношение возможно только в том случае, если все коэффициенты равны нулю, откуда

$$p = 2\lambda, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0;$$

мы получаем, таким образом, соотношение $A^{p+1}u = \alpha_0 u$, умножая которое на C, имеем:

$(\lambda - p - 1) A^{p+1}u = \alpha_0\lambda u$, откуда $(p+1)\alpha_0 = 0$, $\alpha_0 = 0$; следовательно,

$$A^{p+1}u = 0, \quad \lambda = \frac{p}{2}.$$

Отсюда вытекает, что независимые векторы $u, Au, \ldots, A^p u$ преобразуются линейно между собой при бесконечно малых, а следовательно, и конечных вращениях. Так как представление неприводимо, то порядок его равен $p+1$; *оно полностью определяется целым числом p*, так как

$$Cu = \frac{p}{2}u, \quad CAu = \left(\frac{p}{2} - 1\right)Au, \quad CA^2u = \left(\frac{p}{2} - 2\right)A^2u, \ldots,$$
$$CA^pu = -\frac{p}{2}A^pu; \tag{I}$$

$$Bu = 0, \quad BAu = -\frac{p}{2}u, \quad BA^2u = (1-p)Au, \ldots,$$
$$BA^pu = -\frac{p}{2}A^{p-1}u. \tag{II}$$

Мы приходим, таким образом, к теореме:

Теорема. *Существует не более одного неприводимого линейного представления данного порядка.*

Ввиду того, что раньше было доказано существование неприводимого представления любого порядка, отсюда вытекает, что кроме указанного представления любого порядка других не существует.

Отметим, что случай $p = 0$ дает представление первого порядка, для которого матрицы A, B, C равны нулю; это — тождественное представление: $u' = u$.

78. Приводимые представления. Рассмотрим снова какое-нибудь линейное представление. Если оно приводимо, то существуют векторы, независимые от рассмотренных выше векторов u, $Au, \ldots, A^p u$. Мы будем предполагать в дальнейшем, что $\frac{p}{2}$ — наибольшее собственное значение матрицы C. Предположим сначала, что существует, по крайней мере, один вектор v, независимый от u и принадлежащий тому же собственному значению $\frac{p}{2}$ матрицы C. Применяя к v те же рассуждения, что и к u, мы установим существование $p+1$ векторов v, $Av, \ldots, A^p v$, преобразующихся линейно между собой неприводимым образом. Будем продолжать таким же образом, если будут находиться новые векторы, принадлежащие собственному значению $\frac{p}{2}$ матрицы C; мы получим таким образом некоторое число h совокупностей по $p+1$ векторов, причем в каждой такой совокупности $p+1$ векторов преобразуются неприводимым образом. Полученные $h(p+1)$ векторов линейно независимы; в самом деле, они преобразуются как векторы линейного представления, которое разлагается на h неприводимых эквивалентных частей; тогда, как известно (п. 34), каждое линейное соотношение между рассматриваемыми $h(p+1)$ векторами может быть получено исключительно приравниванием нулю всех векторов одной из этих частей или, по крайней мере, всех векторов

$$\begin{gathered}
a_1 u + a_2 v + \ldots + a_h w, \\
a_1 Au + a_2 Av + \ldots + a_h Aw, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{gathered}$$

но между векторами u, $v, \ldots, w$, соответствующими собственному значению $\frac{p}{2}$, не существует по предположению никакой линейной зависимости. Следовательно, $h(p+1)$ векторов h серий линейно независимы. Обозначим через E_1 линейное пространство, которое они определяют.

Предположим теперь, что порядок представления больше $h(p+1)$ и что существуют собственные значения матрицы C, которые дают векторы, не лежащие в пространстве E_1. Пусть $\frac{q}{2} < \frac{p}{2}$ — наибольшее из этих собственных значений. Пусть s — вектор, удовлетворяющий соотношению $Cs = \frac{q}{2} s$; вектор Bs, принадлежащий собственному значению $\frac{q}{2}+1$ матрицы C, должен лежать в E_1; раз он лежит в E_1, он может быть получен при помощи преобразования B из другого вектора t пространства E_1, принадлежащего собственному значению $\frac{q}{2}$; рассматривая тогда вместо s вектор $s-t$, который не принадлежит к E_1, мы видим, что $B(s-t)=0$. Меняя обозначение $s-t$ на s, мы получаем вектор s, не принадлежащий к E_1 и удовлетворяющий соотношешениям *)

$$Cs=\frac{q}{2}s, \qquad Bs=0. \tag{III}$$

*) Приведенное здесь доказательство существования вектора, удовлетворяющего соотношениям (III), нуждается в дополнении.

Отметим прежде всего следующее свойство собственных значений матрицы C. Из формул (I) предыдущего параграфа вытекает, что если наибольшее собственное значение матрицы C равно λ, то она имеет также собственные значения $\lambda-1$ $\lambda-2, \ldots, -\lambda$. Далее, если бы мы при выводе формул (I), (II) (п. 77) исходили не из наибольшего, а из наименьшего собственного значения μ матрицы C, то матрицы A и B поменялись бы ролями, и мы получили бы следующие формулы, аналогичные (I):

$$Cz=-\frac{q}{2}z; \quad CBz=\left(-\frac{q}{2}+1\right)Bz, \ldots, \quad CB^qz=\frac{q}{2}B^qz,$$

$$Az=0, \qquad ABz=\frac{q}{2}z, \ldots, \quad AB^qz=\frac{q}{2}B^{q-1}z.$$

Отсюда мы видим, что матрица C имеет также собственные значения $\mu+1$, $\mu+2, \ldots, -\mu$. Итак, если наибольшее собственное значение равно λ, то наименьшим является $-\lambda$.

Обратимся теперь к доказательству существования вектора s, удовлетворяющего соотношению (III). Обозначим через r вектор, удовлетворяющий уравнению $Cr=\frac{q}{2}r$, $\left(\frac{q}{2}<\frac{p}{2}\right)$, причем q имеет указанное в тексте свойство. На основании отмеченного выше свойства собственных значений матрицы C имеем $\frac{q}{2}>-\frac{p}{2}$. Применяя к обеим частям уравнения $Cr=\frac{q}{2}r$ матрицу B, получаем

$$CBr=\left(\frac{q}{2}+1\right)Br.$$

Если $Br=0$, мы полагаем $s=r$ и сразу получаем соотношение (III); если $Br\neq 0$, то этот вектор, как указано в тексте, должен принадле-

Мы можем повторить приведенные выше рассуждения и найти последовательность $q+1$ векторов s, $As, \ldots$, $A^q s$, которые преобразуются между собой неприводным образом.

Продолжая этот процесс дальше, мы придем в результате к пространству $\mathcal{E}$, которое преобразуется группой вращения вполне приводимым образом и содержит все векторы, принадлежащие собственным значениям матрицы C.

Если пространство $\mathcal{E}$ совпадает с пространством E данного представления, то последнее вполне приводимо. Мы докажем теперь, что действительно $\mathcal{E}$ совпадает с E.

79. Теорема о полной приводимости. Изменим наши обозначения и возьмем в пространстве $\mathcal{E}$ базис, составленный из векторов $u^{(1)}$, $u^{(2)}, \ldots$, $u^{(\nu)}$, которые принадлежат различным собственным значениям матрицы C. Собственное значение λ_α, которому принадлежит $u^{(\alpha)}$, является целым числом или половиной целого числа. Напомним, что существует столько независимых векторов, принадлежащих собственному значению $-\lambda_\alpha$, сколько и собственному значению λ_α, и что если $\lambda_\alpha \geqslant 1$, то каждый вектор, принадлежащий собственному значению λ_α, может быть получен применением преобразования B к вектору, принадлежащему собственному значению $\lambda_\alpha - 1$.

Предположим, что пространство $\mathcal{E}$ имеет ν измерений, причем ν меньше числа измерений n пространства E. Если мы условимся рассматривать, как равные, два вектора пространства E,

---

жать к E_1. Таким образом, $\frac{q}{2}+1$ является одним из собственных значений

$$\left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2}-1, \ldots, -\frac{p}{2}\right)$$

матрицы C, относящихся к пространству E_1, причем $\frac{q}{2}+1 > -\frac{p}{2}$; поэтому $Br = \lambda A^k u + \mu A^k v + \ldots + \nu A^k w$, где $k = \frac{p}{2} - \left(\frac{q}{2}+1\right)$. Так как $k < p$, то на основании формул (II). (п. 77) имеем $r = Bt$, причем t принадлежит собственному значению $\frac{p}{2} - k - 1 = \frac{q}{2}$.

Полагая $s = r - t$, получаем формулы (III). *(Прим. ред.)*

разность между которыми принадлежит к $\mathcal{E}$, то получим в пространстве $E' = E/\mathcal{E}$ с числом измерений $n - \nu$ линейное представление группы вращений. Пусть μ — такое собственное значение матрицы C в этом представлении, что $\mu + 1$ не является собственным значением. В E существует вектор v, не принадлежащий к $\mathcal{E}$ и обладающий тем свойством, что

$$Cv = \mu v + \alpha_l u^{(l)}.$$

Если мы рассмотрим вектор

$$w = v + \beta_l u^{(l)},$$

то получим

$$Cw = \mu w + [\alpha_l + \beta_l (\lambda_l - \mu)] u^{(l)}.$$

Отсюда вытекает, что

1° μ является одним из собственных значений матрицы C, относящихся к $\mathcal{E}$; в самом деле, в противном случае можно было бы выбрать постоянные β так, чтобы обратить в нуль коэффициенты $\alpha_l + \beta_l(\lambda_l - \mu)$, то есть вектор w, *не принадлежащий* к $\mathcal{E}$, умножался бы на μ, что противоречит предположению;

2° можно выбрать β_l так, чтобы вектор $Cw - \mu w$ принадлежал собственному значению μ.

Положим

$$\mu = \frac{r}{2} \quad \text{и} \quad Cw = \frac{r}{2} w + u,$$

причем u принадлежит собственному значению $\frac{r}{2}$. Отсюда на основании (2) выводим

$$CBw = \left(\frac{r}{2} + 1\right) Bw + Bu.$$

Если вектор Bu не равен нулю, необходимо, чтобы вектор Bw лежал в $\mathcal{E}$, на основании предположения, сделанного относительно μ; то же самое, впрочем, имеет место, если Bu равен нулю. Так как Bw принадлежит к $\mathcal{E}$, то разность $CBw - \left(\frac{r}{2} + 1\right) Bw$, как не трудно видеть, является линейной комбинацией векторов, принадлежащих собственным значениям, отличным от $\frac{r}{2}+1$; так как Bu принадлежит собственному значению $\frac{r}{2}+1$, то $Bu=0$. Наконец, так как $\frac{r}{2}+1 \geqslant 1$, то в $\mathfrak{E}$ можно найти такой вектор u', принадлежащий собственному значению $\frac{r}{2}$, что $Bw=Bu'$. Полагая $s=w-u'$, найдем основные соотношения

$$Cs=\frac{r}{2}s+u, \qquad Bs=0, \qquad Bu=0. \tag{3}$$

Вектор u дает последовательность $r+1$ векторов u, $Au, \ldots$ $\ldots, A^r u$, преобразующихся неприводимым образом, причем $A^{r+1}u=0$. Посмотрим, как преобразуются векторы s, $As, \ldots,$ $\ldots A^r s$, $A^{r+1}s$. Вычисления, аналогичные предыдущим и опирающиеся на соотношения структуры (2), дают

$$\left.\begin{aligned} &CAs=\left(\frac{r}{2}-1\right)As+Au, \quad CA^2s=\left(\frac{r}{2}-2\right)A^2s+A^2u, \ldots \\ &\qquad \ldots, CA^h s=\left(\frac{r}{2}-h\right)A^h s+A^h u, \ldots; \end{aligned}\right\} \text{(IV)}$$

$$\left.\begin{aligned} &BAs=-\frac{r}{2}s-u, \quad BA^2s=(1-r)As-2Au, \ldots \\ &\qquad \ldots, BA^h s=\frac{h}{2}(h-1-r)A^{h-1}s-hA^{h-1}u, \ldots \end{aligned}\right\} \text{(V)}$$

Пусть $A^{h+1}s$ — первый из векторов s, $As, A^2s, \ldots$, который линейно зависит от предыдущих и от u, Au, $A^2u \ldots$, $A^r u$: $A^{h+1}s=a_0 s+a_1 As+\ldots+a_h A^h s+\beta_0 u+\beta_1 Au+\ldots+\beta_r A^r u$; применяя к обеим частям этого соотношения преобразование B, мы получим новое соотношение, в котором будет отсутствовать $A^{h+1}s$ и которое, следовательно, должно удовлетворяться тождественно. Но в этом новом соотношении коэффициент при $A^h s$ равен $\frac{(h+1)(h-r)}{2}$, то есть $h=r$; в этом же соотношении коэффициент при $A^r u'$ равен $-(r+1)$ в левой части и нулю в правой. Таким образом, мы приходим к противоречию, то есть нельзя предполагать, что пространство $\mathcal{E}$ не совпадает с E, откуда следует *)

Теорема. *Каждое линейное представление группы вращений* (аналитическое, если речь идет о группе комплексных вращений) *вполне приводимо.*

80. Матрица $R_1^2+R_2^2+R_3^2$. В квантовой механике неприводимые представления группы вещественных вращений играют важную роль: каждое из них соответствует одному из *состояний* атома гелия; матрицы $\frac{h}{i}R_1$, $\frac{h}{i}R_2$, $\frac{h}{i}R_3$ определяют состав-

---

*) Указанное в тексте доказательство может быть упрощено и уточнено, если непосредственно воспользоваться теорией элементарных делителей в геометрической форме (Клейн, *Высшая геометрия*, ГОНТИ, 1939, стр. 374—389; Широков, *Тензорное исчисление*, ч. 1, ОНТИ, 1934, стр. 172—198). Если собственное значение λ матрицы M имеет кратность k, и ему соответствует k независимых главных направлений (то есть векторов x, удовлетворяющих уравнению $Mx=\lambda x$), то будем называть такое собственное значение *неособенным*; если же ему соответствует меньше чем k независимых главных направлений, условимся называть его *особенным*. λ тогда и только тогда является особенным собственным значением, если существуют векторы x и y, удовлетворяющие уравнениям

$$Mx=\lambda x+y, \quad My=\lambda y.$$

Доказательство теоремы приводится к доказательству того, что у матрицы C нет особенных собственных значений. Предположим противное: что одно из собственных значений, например μ, — особенное. Тогда существуют векторы x и y, удовлетворяющие уравнениям

$$Cx=\mu x+y, \quad Cy=\mu y. \tag{a}$$

Так как y принадлежит кратному собственному значению матрицы C, то на основании п. 77 μ является одним из собственных значений в ряде

$$\left(\frac{q}{2}, \frac{q}{2}-1, \ldots, -\frac{q}{2}\right), \quad (q\leqslant p), \tag{b}$$

причем существуют векторы s и z, удовлетворяющие соотношениям

$$Cs=\frac{q}{2}s, \quad Bs=0, \quad A^q s\neq 0, \quad A^{q+1}s=0,$$

$$Cz=-\frac{q}{2}z, \quad Az=0, \quad B^q s\neq 0, \quad B^{q+1}z=0;$$

если $\mu=\frac{q}{2}-k$, то $y=A^k s=B^{q-k}z$. Применяя повторно к первому ляющие соответствующих кинетических моментов; квадрат кинетического момента дается матрицей $-h^2(R_1^2+R_2^2+R_3^2)$. Покажем, что эта матрица является произведением единичной матрицы на положительное число.

В самом деле, в любом представлении группы вращений *матрица* $R_1^2+R_2^2+R_3^2$ *коммутирует с каждой из матриц* R_1, R_2, R_3; например,

$$R_1(R_1^2+R_2^2+R_3^2)-(R_1^2+R_2^2+R_3^2)R_1=R_1R_2^2-R_2^2R_1+$$
$$+R_1R_3^2-R_3^2R_1=(R_2R_1+R_3)R_2-R_2(R_1R_2-R_3)+$$
$$+(R_3R_1-R_2)R_3-R_3(R_1R_3+R_2)=0.$$

из соотношений (a) матрицы A и B, получаем

$$\left.\begin{aligned} CA^mx&=(\mu-m)A^mx+A^my, & A^my&=A^{k+m}s,\\ CB^nx&=(\mu+n)B^nx+B^ny, & B^ny&=B^{q+n-k}z. \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

Так как векторы A^my и B^ny (при $m\leqslant q-k$, $n\leqslant k$) не равны нулю и определяют главные направления матрицы C, то отсюда следует, что если одно из собственных значений в ряде (b) является особенным, то и все значения этого ряда также особенные. Поэтому в формуле (a) можно положить

$$\mu=\frac{q}{2},\quad y=s,$$
$$Cx=\frac{q}{2}x+s,\quad Cs=\frac{q}{2}s. \qquad (d)$$

Покажем, что вектор x может быть выбран так, что $Bx=0$. В самом деле, применяя к первому из соотношений (d) матрицу B, получаем

$$CBx=\left(\frac{q}{2}+1\right)Bx.$$

Если $Bx\neq 0$, то этот вектор определяет главное направление матрицы C с характеристическим числом $\frac{q}{2}+1$, то есть на основании формул (II) (п. 77) $Bx=Bt$, где t — вектор главного направления матрицы C, причем $Ct=\frac{q}{2}t$. Таким образом, обозначая $x-t$ через x, имеем

$$Cx=\frac{q}{2}x+s,\quad Cs=\frac{q}{2}s,\quad Bx=0.$$

Если представление неприводимо, то отсюда вытекает (п. 32)[1]), что матрица $R_1^2+R_2^2+R_3^2$ равна произведению единичной матрицы на некоторое число. При преобразовании векторов пространства она умножает их на один и тот же множитель.

Полагая, как мы уже делали это выше (п. 77),

$$A=R_1-iR_2, \quad B=\frac{1}{2}(R_1+iR_2), \quad C=iR_3,$$

получаем соотношение

$$AB+BA-C^2=R_1^2+R_2^2+R_3^2. \tag{4}$$

Если мы возьмем неприводимое представление $D_{\frac{p}{2}}$, то получим для вектора u, соответствующего собственному значению $\frac{p}{2}$ матрицы C, соотношения

$$Cu=\frac{p}{2}u, \quad Bu=0, \quad BAu=-\frac{p}{2}u,$$

откуда

$$ABu+BAu-C^2u=-\frac{p}{2}\left(1+\frac{p}{2}\right)u,$$

Применяя к последнему соотношению несколько раз матрицу A, получаем

$$BA^h x=\frac{h}{2}(h-1-q)A^{h-1}x-hA^{h-1}s. \tag{e}$$

Полагаем $h=q+1$. Если $A^{q+1}x=0$, то получаем противоречие: $q+1=0$. Если $A^{q+1}x\neq 0$, то формулы (c) показывают, что векторы $A^{q+k}x$ определяют главные направления матрицы C. Следовательно, найдется такое k, что $A^{q+k}x\neq 0$, $A^{q+k+1}x=0$. Полагая в формуле (e) $h=q+k+1$, получаем $h=0$, то есть и в этом случае приходим к противоречию. (*Прим. ред.*)

1) Собственно говоря, указанная теорема применяется к матрицам, перестановочным со всеми матрицами, представляющими конечные преобразования группы; но матрица, соответствующая вращению на угол ϑ, которое задается бесконечно малым вращением R, определяется следующей формулой:

$$S=1+\vartheta R+\frac{1}{2}\vartheta^2R^2+\frac{1}{3!}\vartheta^3R^3+\ldots;$$

очевидно, что если $R_1^2+R_2^2+R_3^2$ коммутирует с R, то она коммутирует и с S.

и, следовательно,

$$R_1^2+R_2^2+R_3^2=-\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}+1\right).$$

Итак доказана

Теорема. *В неприводимом представлении D_j матрица $R_1^2+R_2^2+R_3^2$ равна $-j(j+1)$.*

81. Примечания. При помощи матрицы, аналогичной матрице $R_1^2+R_2^2+R_3^2$, H. Casimir и B. L. van der Waerden[1]), а еще проще M. J. H. C. Whitehead[2]) дали доказательство полной приводимости линейных представлений более общих групп, чем группа вращений, а именно, полупростых групп, которые содержат, в частности, группу вращений пространства любого числа измерений. До этого H. Weyl'ем[3]) было дано трансцендентное доказательство этой теоремы; это доказательство применимо ко всем *замкнутым*, или *компактным*, группам и, значит, ко всем тем группам, которые из них выводятся при помощи перехода из вещественной области в комплексную (следует только отметить, что для этих последних речь идет об аналитических представлениях, но эта оговорка легко устранима).

Итак, *мы доказали теорему о полной приводимости и нашли все неприводимые представления в случае группы вращений вещественного эвклидова пространства и группы собственных вращений вещественного псевдоэвклидова пространства.* То же самое надо сказать о группе вращений эвклидова комплексного пространства, только ограничиваясь аналитическими линейными представлениями.

III. Линейные представления группы комплексных вращений

82. Постановка проблемы. Остается определить все линейные непрерывные представления группы комплексных вращений.

---

[1]) Math. Ann., 111, 1935, стр. 1—12.

[2]) Quarterly J. of Math., 8, 1937, стр. 220—237.

[3]) H. Weyl, *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformation* (Math. Zeitschr., 23. 1925, стр. 289).

Мы знаем (п. 74), что если обозначить через α, β, γ три комплексных параметра вращения и положить

$$\alpha=\alpha_1+i\alpha_2,\quad \beta=\beta_1+i\beta_2,\quad \gamma=\gamma_1+i\gamma_2,$$

то элементы матриц, определяющих представление, являются аналитическими функциями 6 вещественных параметров α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2. Переходя из вещественной области в комплексную, мы получим линейную группу, у которой коэффициенты определяются аналитическими функциями 6 комплексных параметров α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 или 6 комплексных параметров $\alpha_1+i\alpha_2$, $\beta_1+i\beta_2$, $\gamma_1+i\gamma_2$, $\alpha_1-i\alpha_2$, $\beta_1-i\beta_2$, $\gamma_1-i\gamma_2$, то есть 6 комплексных параметров α, β, γ, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$, где через $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$ обозначены выражения $\alpha_1-i\alpha_2$, $\beta_1-i\beta_2$, $\gamma_1-i\gamma_2$, причем эти 6 *параметров независимы.*

Ясно, что эта группа дает представление группы $\mathfrak{G}$, получающейся при рассмотрении вращений с параметрами α, β, γ и вращений с параметрами $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$. Эта группа $\mathfrak{G}$ является так называемым прямым произведением группы G вращений (α, β, γ) и группы G' вращений $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma})$; каждый элемент группы $\mathfrak{G}$ является совокупностью $(\mathfrak{R}, \overline{\mathfrak{R}})$ вращения $\mathfrak{R}$, определяемого параметрами α, β, γ, и вращения $\overline{\mathfrak{R}}$, соответствующего параметрам $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$, причем произведением двух элементов $(\mathfrak{R}, \overline{\mathfrak{R}})$ и $(\mathfrak{R}', \overline{\mathfrak{R}}')$ группы $\mathfrak{G}$ является элемент $(\mathfrak{R}\mathfrak{R}', \overline{\mathfrak{R}\mathfrak{R}'})$. Эта группа содержит подгруппу G элементов $(\mathfrak{R}, 1)$, в которых $\overline{\mathfrak{R}}$ является тождественным вращением, и группу G' элементов $(1, \overline{\mathfrak{R}})$, в которых $\mathfrak{R}$ есть тождественное вращение; элементы групп G и G', конечно, перестановочны между собой, и каждый элемент группы $\mathfrak{G}$ одним и только одним способом выражается как произведение элемента группы G и элемента группы G'. $\mathfrak{G}$ называют прямым произведением G и G' и обозначают следующим образом: $\mathfrak{G}=G\times G'$.

Таким образом, мы пришли к следующей проблеме:

Проблема. *Даны две группы G и G' и их прямое произведение $G\times G'=\mathfrak{G}$; зная все линейные аналитические представления каждой из групп G и G', построить все аналитические представления группы $\mathfrak{G}$.*

Напомним, что представление является аналитическим, если элементы соответствующих матриц суть аналитические функции комплексных параметров группы.

В рассматриваемом случае мы знаем все аналитические представления групп G и G' (являющиеся, между прочим, одинаковыми, но у которых параметры рассматриваются как различные).

83. Линейные представления прямого произведения двух групп. Предположим, что теорема о полной приводимости имеет место для каждой из составляющих групп G и G', что мы имеем действительно в рассматриваемом случае. Каждое линейное представление группы $\mathfrak{G}$ дает линейное представление ее подгруппы G; по предположению это представление может быть разложено на определенное число неприводимых представлений. Рассмотрим одно из них, порядка r и предположим, что существует $h-1$ других, эквивалентных ему; пусть

$$x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \ldots, \quad x_r^{(\alpha)} \quad (\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ h)$$

— составляющие этих h неприводимых представлений. Пусть s — элемент группы G, t — элемент группы G'; обозначим через $y_1^{(\alpha)}, y_2^{(\alpha)}, \ldots, y_r^{(\alpha)}$ переменные, преобразованные из $x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \ldots, x_r^{(\alpha)}$ посредством t; s и t перестановочны:

$$st=ts;$$

если мы применим к переменным $x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \ldots, x_r^{(\alpha)}$ сначала s, а затем t, то переменная $x_i^{(\alpha)}$ преобразуется сначала в $a_i^k x_k^{(\alpha)}$, а затем в $a_i^h y_h^{(\alpha)}$, если, наоборот, применим сначала t, то $x_i^{(\alpha)}$ преобразуется в $y_i^{(\alpha)}$; следовательно, элемент s, примененный к $y_i^{(\alpha)}$, дает $a_i^h y_h^{(\alpha)}$. Другими словами, элементами группы G составляющие $y_i^{(\alpha)}$ преобразуются как $x_i^{(\alpha)}$. Следовательно, имеем (п. 33)

$$y_i^{(\alpha)}=b_\beta^\alpha x_i^{(\beta)}.$$

В результате при применении элемента st имеем преобразование

$$x_i^{(\alpha)} \longrightarrow a_i^k\, b_\beta^\alpha x_k^{(\beta)};$$

матрица (a_i^k) показывает, как элемент s группы G преобразует между собой составляющие одного из тензоров $x^{(\alpha)}$, матрица (b_β^α) — как элемент t группы G' преобразует между собой h тензоров $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(h)}$, неприводимых относительно G. Матрицы (a_i^k) определяют неприводимое линейное представление группы G

$$x_i \longrightarrow a_i^k x_k;$$

матрицы (b_β^α) определяют представление группы G'

$$x^{(\alpha)} \longrightarrow b_\beta^\alpha x^{(\beta)}.$$

Мы видим, таким образом, что hr переменных $x_i^{(\alpha)}$ преобразуются линейно между собой при применении группы $\mathfrak{G}$; рассматриваемое линейное представление группы $\mathfrak{G}$ разложится, таким образом, на такое число неприводимых представлений, сколько в индуцированном представлении группы G' имеется неприводимых неэквивалентных представлений. Кроме того, мы видим, что hr переменных $x_i^{(\alpha)}$ преобразуются как произведения $x_i x^{(\alpha)}$ составляющих неприводимого представления группы G на составляющие представления группы G'. Так как это последнее вполне приводимо, то и представление $x_i x^{(\alpha)}$ само вполне приводимо, причем каждая часть является произведением неприводимого представления группы G на неприводимое представление группы G'. Таким образом, имеет место

Теорема. *Каждый тензор, неприводимый относительно прямого произведения $G \times G'$ двух групп G и G', эквивалентен произведению тензора, неприводимого относительно G, на тензор, неприводимый относительно G'; если теорема о полной приводимости имеет место для G и G', то она имеет место и для их прямого произведения.*

84. Приложения к группе комплексных вращений. В рассматриваемом нами случае каждый неприводимый аналитический тензор прямого произведения двух групп комплексных вращений эквивалентен произведению тензора $D_{\frac{p}{2}}$ на тензор $D_{\frac{q}{2}}$, причем первый преобразуется вращениями с параметрами α, β, γ, второй — вращениями с независимыми параметрами $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$. Если теперь мы вернемся к группе комплексных вращений, то получим тот же тензор, *но в котором* $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ *следует рассматривать как величины комплексно сопряженные* с α, β, γ. Отсюда вытекает теорема:

Каждый неприводимый тензор группы комплексных вращений эквивалентен тензору, составляющие которого являются одночленами, составленными из ξ_0, ξ_1, $\bar{\xi}_0$, $\bar{\xi}_1$, *порядка* p *относительно* ξ_0, ξ и q *относительно* $\bar{\xi}_0$, $\bar{\xi}_1$, *где через* ξ_0, ξ_1 *обозначен произвольный спинор, через* $\bar{\xi}_0$, $\bar{\xi}_1$ — *его сопряженный.*

Соответствующее представление можно обозначить через $D_{\frac{p}{2}, \frac{q}{2}}$ и за производящую форму взять полином

$$(a\xi_0 + b\xi_1)^p (c\bar{\xi}_0 + d\bar{\xi}_1)^q$$

с четырьмя произвольными параметрами a, b, c, d. Порядок этого представления равен $(p+1)(q+1)$.

Мы встретим в дальнейшем снова эти представления. Отметим случай $p=q=1$, который дает тензор четвертого порядка с составляющими $\xi_0\bar{\xi}_0$, $\xi_0\bar{\xi}_1$, $\xi_1\bar{\xi}_0$, $\xi_1\bar{\xi}_1$; эти составляющие связаны квадратичным соотношением. Для $p=q$ имеем *вещественный* тензор в том смысле, что его составляющие могут быть выбраны таким образом, что при любом комплексном вращении они преобразуются линейной подстановкой с вещественными коэффициентами. Пример: 9 произведений $x_i\bar{x}_j$ составляющих вектора на составляющие вектора комплексно сопряженного.

IV. Однозначность и двузначность

85. Однозначность линейных представлений унимодулярной группы двух переменных. Произведенное исследование неприводимых линейных представлений группы вращений комплексного эвклидова пространства, группы вращений вещественного эвклидова пространства и группы собственных вращений псевдоэвклидова пространства дало представления однозначные и двузначные. Для двух последних групп двузначными представлениями являются $D_{\frac{p}{2}}$ с нечетным p; для первой группы двузначными являются $D_{\frac{p}{2}, \frac{q}{2}}$ при $p+q$ нечетном. В действительности все полученные представления являются также представлениями соответствующей группы спиноров, и с этой точки зрения они однозначны. Мы приходим, таким образом, к следующей теореме:

Теорема. *Три группы линейных унимодулярных подстановок с двумя переменными, являющихся соответственно 1° комплексными, 2° унитарными, 3° вещественными, не имеют многозначных линейных представлений.*

В случае унитарной группы можно дать доказательство топологического характера. Каждая унитарная унимодулярная матрица 2-го порядка имеет вид $\begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, причем $a\bar{a}+b\bar{b}=1$. Полагая

$$a=a_1+ia_2, \quad b=a_3+ia_4,$$

мы видим, что унитарная унимодулярная группа является многообразием, каждая точка которого определяется четырьмя вещественными числами a_1, a_2, a_3, a_4, сумма квадратов которых равна 1; это — *трехмерное сферическое пространство* (единичная сфера в эвклидовом пространстве четырех измерений). Это пространство односвязно, то есть каждый замкнутый контур может быть стянут в нем в точку непрерывной деформацией; проще всего это можно доказать, преобразуя эту сферу в трехмерное эвклидово пространство при помощи инверсии, полюс которой лежит в некоторой точке данной сферы (стереографическая проекция); эта инверсия преобразует ее в эвклидово трехмерное пространство (замыкаемое на бесконечности точкой). Можно доказать, что если бы унитарная унимодулярная группа имела многозначное представление, то, изменяя непрерывно матрицу этого представления, когда мы перемещаемся вдоль соответственно выбранного замкнутого контура, выходящего из начальной точки и возвращающегося в нее же, мы получили бы в результате из единичной матрицы некоторую другую. Преобразуя непрерывно этот контур, будем получать одинаковые конечные матрицы, но так как контур можно стянуть в начальную точку, мы приходим к противоречию.

86. Линейные представления вещественной проективной группы одной переменной. Можно показать, что пространство унимодулярных комплексных матриц также односвязно; это объясняет невозможность существования многозначных представлений унимодулярной комплексной группы. Но пространство *вещественных* унимодулярных матриц уже не является односвязным, — с точки зрения топологии оно гомеоморфно внутренности тора; *таким образом, для этой группы нельзя дать топологического доказательства несуществования многозначных линейных представлений.* Заметим, между прочим, что линейные представления этой группы являются также линейными представлениями группы проективных преобразований одной вещественной переменной

$$z' = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad - bc > 0);$$

элементу этой группы соответствуют две вещественных линейных унимодулярных подстановки двух переменных. Проективная группа допускает, таким образом, линейные представления однозначные и двузначные, но *не допускает многозначных представлений порядка выше второго.*

Отсюда можно вывести существование групп, которые не имеют ни одного *точного* линейного представления, то-есть такого, чтобы существовало взаимно однозначное соответствие между элементами группы и матрицами представления. Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{tg} x' = \frac{a \operatorname{tg} x + b}{c \operatorname{tg} x + d} \quad (ad - bc > 0).$$

Это уравнение для x' имеет бесконечное множество решений. выберем для $x = 0$ одно из значений $\operatorname{arctg} \frac{b}{d}$ и будем его непрерывно изменять, когда x изменяется от 0 до $+\infty$ или от 0 до $-\infty$. Так как

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{ad - bc}{(a \sin x + b \cos x)^2 + (c \sin x + d \cos x)^2},$$

мы видим, что $\frac{dx'}{dx}$ заключается между определенными положительными числами; следовательно, когда x меняется от 0 до

$+\infty$, x' возрастает от $\operatorname{arctg}\frac{b}{d}$ до $+\infty$, а при изменении x от 0 до $-\infty$, x' убывает от $\operatorname{arctg}\frac{b}{d}$ до $-\infty$. Мы определяем, таким образом, преобразование на вещественной прямой. Совокупность этих преобразований образует, очевидно, группу, и *эта группа непрерывна*. Для доказательства последнего свойства достаточно показать, что можно непрерывным образом перейти от преобразования с параметрами a, b, c, d, соответствующего некоторому значению $\operatorname{arctg}\frac{b}{d}$, к преобразованию с теми же параметрами, соответствующему другому значению $\operatorname{arctg}\frac{b}{d}$, например, отличающегося от первого на π или $-\pi$. Для этого мы будем рассматривать a, b, c, d как однородные координаты точки в трехмерном пространстве; каждому проективному преобразованию соответствует точка, лежащая в положительной области пространства, ограниченной линейчатой поверхностью 2-го порядка $ad-bc=0$. Проведем через рассматриваемую точку (a, b, c, d) прямую, не пересекающую поверхности, и возьмем на этой прямой некоторую точку (a_0, b_0, c_0, d_0); рассмотрим проективное преобразование, определяемое параметрами $a+\lambda a_0$, $b+\lambda b_0$, $c+\lambda c_0$, $d+\lambda d_0$, причем параметр λ изменяется непрерывно от 0 до $+\infty$ и затем от $-\infty$ до 0; изменяя непрерывно значение $\operatorname{arctg}\frac{b+\lambda b_0}{d+\lambda d_0}$, начиная от выбранного исходного значения, мы придем или к тому же значению, увеличенному на π, или к тому же значению, увеличенному на $-\pi$ (это зависит от выбора направления изменения λ). Таким образом, в семействе рассматриваемых преобразований переменной x мы найдем непрерывную последовательность преобразований, в которой начальное и конечное преобразования соответствуют данным параметрам a, b, c, d, но с величинами для $\operatorname{arctg}\frac{b}{d}$, отличающимися на π. Что и требовалось доказать.

Определенная таким образом непрерывная группа преобразований переменной обладает тем свойством, что преобразованию над $\operatorname{tg} x$ проективной группы соответствует бесконечное множество преобразований переменной x. Такая группа не может, следовательно, допускать точного линейного представления. Ее многообразие односвязно. Этот результат тем более примечателен, что согласно теореме Вейля и Петера каждая замкнутая (компактная) группа имеет всегда точное линейное представление.

Мы получим другие группы, накрывающие конечное число раз проективную группу и не допускающие точного линейного представления, если возьмем, например, уравнение

$$\operatorname{tg} nx' = \frac{a \operatorname{tg} nx + b}{c \operatorname{tg} nx + d} \qquad (n\text{—целое}),$$

рассматривая его как уравнение, выражающее $z' = \operatorname{tg} x'$ в виде функции от $z = \operatorname{tg} x$. Это уравнение порядка n и имеет n решений, из которых каждое дает преобразование на проективной вещественной прямой z (z принимает все значения, включая и ∞). Все эти преобразования образуют непрерывную группу, накрывающую n раз проективную группу одной переменной. Она допускает точное линейное представление только при $n = 1$ и $n = 2$.

V. Линейные представления группы вращений и отражений

87. Постановка проблемы. Зададимся целью определить все линейные представления:

1° группы комплексных вращений и отражений;

2° группы вращений и отражений вещественного эвклидова пространства;

3° группы собственных и несобственных вращений вещественного псевдоэвклидова пространства;

4° группы собственных вращений и собственных отражений того же пространства;

5° группы собственных вращений и несобственных отражений того же пространства.

В каждом из этих случаев мы имеем группу $\mathfrak{G}$, образованную из двух непрерывных семейств G и G', из которых первое образует непрерывную группу; будем употреблять обозначение $\mathfrak{G} = G + G'$. Мы знаем в каждом случае все линейные представления группы G и что теорема о полной приводимости применима. Наконец, для каждого линейного представления группы G мы знаем линейное представление группы $\mathfrak{G}$, дающее для G данное представление.

88. **Случай неприводимых представлений, индуцирующих в группе вращений неприводимое представление.** Сначала мы рассмотрим некоторое неприводимое представление группы $\mathfrak{G}$, дающее для G также неприводимое представление, и покажем, что существует еще одно и только одно представление G, не эквивалентное первому и дающее для G то же самое линейное представление. Обозначим через T матрицу, соответствующую элементу t семейства G'; с другой стороны, пусть s — бесконечно малое преобразование из G и R — соответствующая матрица; элементу tst^{-1} группы G соответствует тогда матрица TRT^{-1}. Если существует другое представление, относящее элементу t матрицу T', то бесконечно малому преобразованию tst^{-1} будет соответствовать матрица $T'RT'^{-1}$; таким образом, какова бы ни была матрица R рассматриваемого представления группы G, имеет место соотношение

$$TRT^{-1} = T'RT'^{-1},$$

или

$$T^{-1}T'R = RT^{-1}T'.$$

Так как матрица $T^{-1}T'$ перестановочна со всеми матрицами R неприводимого представления, то она является скаляром m (п. 32), то есть

$$T' = mT.$$

Коэффициент m не зависит от t; это вытекает из того, что каждый другой элемент из G' имеет вид st, где s принадлежит к G. Рассматривая элемент t^{-1}, принадлежащий G', выводим, что $m^2 = 1$, $m = -1$. Если вместо матрицы T взять $-T$, то получим новое линейное представление группы $\mathfrak{G}$.

Эти оба представления не эквивалентны, так как в противном случае существовала бы такая постоянная матрица C, что

$$CSC^{-1} = S, \quad CTC^{-1} = -T;$$

первое соотношение показывает, что C является скаляром, а это противоречит второму.

Теорема. *Если дано линейное неприводимое представление группы G, то или не существует представления группы $\mathfrak{G}$, индуцирующего данное представление группы G, или существует два неэквивалентных таких представления.*

89. Противоположный случай. Рассмотрим теперь неприводимое представление группы $\mathfrak{G}$, индуцирующее приводимое представление группы G. Обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_r$ составляющие неприводимой части последнего представления. Пусть t — элемент из G'; предположим, что t преобразует соответственно $x_1, x_2, \ldots, x_r$ в r линейных комбинаций переменных представления, эти комбинации обозначим через $y_1, y_2, \ldots, y_r$ (если группа многозначна, мы будем рассматривать одну из линейных подстановок, соответствующих t). Пусть s — бесконечно малое преобразование из группы G; положим $s' = tst^{-1}$, откуда $ts = s't$. Если мы применим к переменной x_i элемент $s't$, мы получим $b_i^k y_k$, где через b_i^k обозначены элементы матрицы R', преобразующей переменные x_i; с другой стороны, применяя к x_i элемент ts, мы получаем результат применения матрицы R к y_i; следовательно:

Если s' преобразует переменные x_i в $b_i^k x_k$, то $s = t^{-1}s't$ преобразует y_i в $b_i^k y_k$.

Таким образом, мы видим, что величины $y_1, y_2, \ldots, y_r$ дают линейное представление группы G, очевидно, неприводимое. Если изменять t непрерывным образом в G', то переменные x_i будут преобразовываться в линейные комбинации от $y_1, y_2, \ldots, y_r$. Так как элемент t^{-1}, обратный t, принадлежит к G, то все элементы из G' преобразуют $y_1, y_2, \ldots, y_r$ в линейные комбинации от $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

Возможны два случая:

А. *Линейные представления группы G, определяемые соответственно переменными x_i и y_i, эквивалентны.* В этом случае, выполняя предварительно подстановку над переменными y_i, мы можем предполагать, что y_i преобразуются каждым элементом группы G так же, как и x_i. Пусть $x' = Ty$, $y' = Ux$ — уравнения линейной подстановки, соответствующей элементу t из G', и пусть R — матрица, применяемая как к переменным x_i, так и к y_i, соответствующая бесконечно малому преобразованию s из G. Матрица, соответствующая tst^{-1}, равна TRT^{-1}, если она применяется к x_i, и URU^{-1}, если она применяется к y_i; таким образом,

$$TRT^{-1}=URU^{-1},$$

откуда $U=mT$. Но тогда переменные $y_i+\sqrt{m}x_i$, преобразуются между собой элементами из G', так как

$$y'+\sqrt{m}x'=\sqrt{m}T(y+\sqrt{m}x),$$

и аналогично

$$y'-\sqrt{m}x'=-\sqrt{m}T(y-\sqrt{m}x).$$

Во всяком случае существуют линейные тождественные соотношения между x_i и y_i, так как в противном случае рассматриваемое представление группы $\mathfrak{G}$ не было бы неприводимо. Так как два неприводимых представления группы $\mathfrak{G}$, соответствующих матрицам $\sqrt{m}T$ и $-\sqrt{m}T$, не эквивалентны, то это возможно только в том случае, если равны нулю или все переменные $y_i+\sqrt{m}x_i$, или все переменные $y_i-\sqrt{m}x_i$. В том и другом случае, в противоречии с предположением, рассматриваемое представление группы $\mathfrak{G}$ индуцирует неприводимое представление группы G.

В. *Линейные представления группы G, определяемые соответственно переменными x_i и y_i, не эквивалентны.* Этот случай, таким образом, — единственно возможный. Переменные x_i и y_i линейно независимы, так как в противном случае все переменные x_i и все переменные y_i были бы равны нулю, что невозможно. Они составляют все переменные рассматриваемого представления группы $\mathfrak{G}$. Мы покажем, что все неприводимые представления группы $\mathfrak{G}$, которые индуцируют в G два данных неприводимых неэквивалентных представления, эквивалентны между собой. В самом деле, пусть в первом представлении группы $\mathfrak{G}$

$$x'=Uy,\quad y'=Vx$$

— линейная подстановка (или одна из линейных подстановок), соответствующая элементу t из $\mathfrak{G}'$ и пусть

$$x'=U'y,\quad y'=V'x$$

— соответствующая подстановка во втором представлении. Если R — матрица, оперирующая над переменными y_i и соответствующая бесконечно малому преобразованию s из группы G, то имеем:

$$UR U^{-1} = U' \dot{R} U'^{-1}, \text{ откуда } U' = mU;$$

имеем также $V' = nV$, причем коэффициенты m и n являются постоянными. Рассматривая обратное преобразование, выводим $n = \frac{1}{m}$. Но тогда в уравнениях

$$x' = mUy, \; y' = \frac{1}{m} Vx$$

достаточно заменить x_i на mx_i и x'_i на mx'_i, чтобы получить уравнения первого представления, что и доказывает утверждение.

Теорема. *Если существует неприводимое представление группы $\mathfrak{G}$, индуцирующее в группе G приводимое представление, то это последнее разлагается на два неприводимых неэквивалентных представления одного и того же порядка, и всякое другое неприводимое представление группы $\mathfrak{G}$, индуцирующее в G эквивалентное приводимое представление, эквивалентно первому.*

Из приведенного выше исследования вытекает, что каждый элемент из G' преобразует определенный неприводимый тензор группы G в другой неприводимый тензор, вполне определенный. Если этот второй тензор эквивалентен первому, то любой из них дает составляющие одного или, вернее, двух неприводимых неэквивалентных тензоров группы $\mathfrak{G}$. Если данный тензор и преобразованный не эквивалентны, то совокупность составляющих этих двух тензоров дает неприводимый тензор, и только один, группы $\mathfrak{G}$.

90. Приложения. В случае группы вещественных эвклидовых вращений и отражений или группы собственных псевдоэвклидовых вращений и отражений неприводимыми тензорами группы G являются тензоры $D_{\frac{p}{2}}$ производящих полиномов $(a\xi_0 + b\xi_1)^p$. Так как симметрия H_1 преобразует ξ_0 в ξ_0, ξ_1 в $-\xi_1$, то она сохраняет составляющую ξ_0^p; тензор, преобразованный при помощи G', эквивалентен, таким образом, рассматриваемому тензору. Тот же вывод имеет место при рассмотрении группы вращений псевдоэвклидова пространства и группы собственных вращений и несобственных отражений.

Что касается группы комплексных вращений, то тензор производящего полинома

$$(a\xi_0 + b\xi_1)^p (c\bar{\xi}_0 + d\bar{\xi}_1)^q$$

преобразуется в эквивалентный тензор при помощи отражения, так как составляющая $\xi_0^p \bar{\xi}_0^q$ инвариантна при симметрии H_3.

Следовательно, во всех рассмотренных группах каждому неприводимому линейному представлению группы G соответствуют два неэквивалентных неприводимых представления группы $\mathfrak{G}$ и не существует никаких других неприводимых представлений группы $\mathfrak{G}$.

Например, тензору $(a\xi_0 + b\xi_1)^p (c\bar{\xi}_0 + d\bar{\xi}_1)^q$ соответствуют для $\mathfrak{G}$ два неприводимых тензора; преобразованию $\xi'_0 = \xi_0$, $\xi'_1 = -\xi_1$ над спинорами соответствуют для производящего полинома два преобразованных полинома

$$(a\xi_0 - b\xi_1)^p (c\bar{\xi}_0 - d\bar{\xi}_1)^q \quad \text{и} \quad -(a\xi_0 - b\xi_1)^p (c\bar{\xi}_0 - d\bar{\xi}_1)^q.$$

91. Случай группы вращений и отражений вещественного псевдоэвклидова пространства. Здесь мы имеем группу, образованную из четырех непрерывных семейств. Исследование, аналогичное предыдущему, показывает, что *каждому неприводимому тензору группы собственных вращений соответствуют четыре неэквивалентных неприводимых тензора полной группы, причем они являются единственными неприводимыми тензорами этой группы.* Если в одном из этих представлений элементам s, t, u, v четырех семейств соответствуют матрицы S, T, U, V, то в трех других им соответствуют

$$\begin{array}{cccc} S, & T, & -U, & -V; \\ S, & -T, & U, & -V; \\ S, & -T, & -U, & V. \end{array}$$

В то время как в эвклидовом вещественном пространстве существуют два и только два различных тензора, преобразующихся как вектор относительно группы вращений, в пространстве псевдоэвклидовом существуют четыре тензора, преобразующиеся как вектор относительно группы собственных вращений.

Добавим еще, что, как нетрудно видеть, теорема о полной приводимости имеет место для линейных представлений группы $\mathfrak{G} = G + G'$, если мы предполагаем, что она справедлива для представлений группы G; это имеет место в тех случаях, которые были рассмотрены выше.

ЧАСТЬ

II

СПИНОРЫ ПРОСТРАНСТВА $n > 3$ ИЗМЕРЕНИЙ
СПИНОРЫ В РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

ГЛАВА V

СПИНОРЫ ПРОСТРАНСТВА $E_{2\nu+1}$

Спиноры в эвклидовом пространстве нечетного числа измерений $n=2\nu+1$ мы введем при помощи рассмотрения ν-мерных полностью изотропных плоскостей, проходящих через начало координат O. Систему декартовых координат x^{α} мы выберем таким образом, чтобы фундаментальная форма имела следующий вид:

$$F\equiv(x^0)^2+x^1x^{1'}+x^2x^{2'}+\ldots+x^{\nu}x^{\nu'}.$$

Координаты x^{α} можно также рассматривать как контравариантные составляющие вектора $\vec{x}$. В первых разделах этой главы мы будем иметь дело с комплексной областью. Плоскости, которые мы будем рассматривать, проходят все через начало.

I. Изотропные ν-плоскости и матрицы, соответствующие векторам

92. 2^{ν} уравнений изотропной ν-плоскости. Нетрудно видеть, что уравнения, определяющие изотропную плоскость (в которой все векторы изотропны), устанавливают по крайней мере одно соотношение между x^0, x^1, x^2, ..., x^{ν}; в противном случае было бы невозможно обратить в нуль форму F, принимая за $x^{i'}$ линейные формы от x^0, x^1, x^2, ..., x^{ν}. Таким образом, число измерений изотропной плоскости не больше ν. Мы установим сейчас вид уравнений изотропной плоскости, *предполагая общий случай, когда между x^1, x^2, ..., x^{ν} не существует ни одного линейного соотношения.*

Пусть

$$\eta_0\equiv\xi_0x^0+\xi_1x^1+\ldots+\xi_{\nu}x^{\nu}=0 \qquad (1)$$

единственное соотношение между x^0, x^1, x^2, ..., x^{ν}, причем коэффициент ξ_0 не равен нулю. Учитывая это соотношение, приводим полином $\xi_0 F$ к следующему виду:

$$\sum_i x^i (\xi_0 x^{i'} - \xi_i x^0),$$

а это позволяет положить

$$\eta_i \equiv \xi_0 x^{i'} - \xi_i x^0 + \sum_k \xi_{ik} x^k = 0 \quad (\xi_{ij} + \xi_{ji} = 0). \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) определяют искомую ν-плоскость. К ним мы прибавим новые. Образуем комбинацию

$$\xi_i \eta_j - \xi_j \eta_i + \xi_{ij} \eta_0 \equiv \xi_0 (\xi_i x^{j'} - \xi_j x^{i'} + \xi_{ij} x^0) + \\ + \sum_k (\xi_i \xi_{jk} - \xi_j \xi_{ik} + \xi_k \xi_{ij}) x^k$$

и положим

$$\xi_0 \xi_{ijk} = \xi_i \xi_{jk} - \xi_j \xi_{ik} + \xi_k \xi_{ij},$$
$$\xi_0 \eta_{ij} = \xi_i \eta_j - \xi_j \eta_i + \xi_{ij} \eta_0;$$

получаем новые уравнения

$$\eta_{ij} \equiv \xi_i x^{j'} - \xi_j x^{i'} + \xi_{ij} x^0 + \sum_k \xi_{ijk} x^k = 0, \tag{3}$$

причем коэффициенты ξ_{ijk} имеют характер составляющих тривектора (меняют знак при нечетной перестановке индексов).

Образуем теперь комбинацию

$$\xi_{ij} \eta_k + \xi_{jk} \eta_i + \xi_{ki} \eta_j \equiv \xi_0 (\xi_{ij} x^{k'} + \xi_{jk} x^{i'} + \xi_{ki} x^{j'} - \xi_{ijk} x^0 + \\ + \sum_m (\xi_{ij} \xi_{km} + \xi_{jk} \xi_{im} + \xi_{ki} \xi_{jm}) x^m$$

и положим

$$\xi_0 \xi_{ijkh} = \xi_{ij} \xi_{kh} + \xi_{jk} \xi_{ih} + \xi_{ki} \xi_{jh},$$
$$\xi_0 \eta_{ijk} = \xi_{ij} \eta_k + \xi_{jk} \eta_i + \xi_{ki} \eta_j;$$

получаем новые уравнения

$$\eta_{ijk} \equiv \xi_{ij} x^{k'} + \xi_{jk} x^{i'} + \xi_{ki} x^{j'} - \xi_{ijk} x^0 + \sum_h \xi_{ijkh} x^h = 0, \tag{4}$$

причем коэффиценты ξ_{ijkh} имеют характер составляющих 4-вектора.

Продолжая далее, мы введем 2^ν коэффициентов $\xi_{i_1 i_2 \dots i_p}$ ($p=1, 2, \dots, \nu$), обладающих тем свойством, что они сохраняют знак при четной перестановке индексов и меняют на обратный при нечетной, и 2^ν линейных форм $\eta_{i_1 i_2 \dots i_p}$, обладающих тем же свойством. Величины ξ_α, где через α обозначен *составной индекс:* 0, i, ij, ijk, ..., определяются рекуррентно через ξ_0, ξ_i, ξ_{ij}, ... Если p четное, то

a) $$\xi_0 \xi_{i_1 i_2 \dots i_p} = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{k-1} \xi_{i_k i_p} \xi_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_{p-1}};$$

если p нечетное, то

b) $$\xi_0 \xi_{i_1 i_2 \dots i_p} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \xi_{i_k} \xi_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_p}.$$

Формы η_α определяются соотношениями:

c) $$\eta_{i_1 i_2 \dots i_p} \equiv \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \xi_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_p} x^{i'_k} +$$
$$+ (-1)^p \xi_{i_1 i_2 \dots i_p} x^0 + \sum_{m=1}^{\nu} \xi_{i_1 i_2 \dots i_p m} x^m.$$

Отметим еще, что каждое ξ_α с четным числом индексов $i_1, i_2, \dots, i_p$ может быть выражено с точностью до отрицательной степени ξ_0 при помощи суммы

$$\sum \xi_{j_1 j_2} \xi_{j_3 j_4} \dots \xi_{j_{p-1} j_p},$$

в которой $j_1, j_2, \dots, j_{p-1}, j_p$ суть индексы $i_1, i_2, \dots, i_p$, расположенные в таком порядке, чтобы перестановка $(j_1, j_2, \dots, j_p)$ была одинаковой четности с перестановкой $(i_1, i_2, \dots, i_p)$; два члена этой суммы, содержащие одинаковые множители (с точностью до знака), учитываются только один раз.

2^ν уравнений $\eta_\alpha = 0$ с 2^ν параметрами определяют в случае $\xi_0 \neq 0$ изотропную ν-плоскость, причем ξ_α должны удовлетворять соотношениям a) и b). В дальнейшем (п. **106**) мы увидим, что в случае $\xi_0 = 0$ эти уравнения также могут определять изотропную ν-плоскость, если ξ_α удовлетворяют соотношениям a), b) и дополннтельным, которые мы получим; мы увидим также, что таким образом может быть получена каждая изотропная ν-плоскость.

93. Матрица, соответствующая вектору. Мы будем называть *спинором* систему 2^ν произвольных величин ξ_α, *вообще говоря не связанных соотношениями* a) и b) и преобразующихся при вращениях и отражениях по законам, которые мы введем в дальнейшем (пп. **96** и **97**). Мы убедимся *a posteriori*, что такое введение операций вращения и отражения совместимо со свойством определенного класса спиноров соответствовать изотропной ν-плоскости.

Рассмотрим теперь 2^ν форм η_α и в каждой из них коэффициенты при ξ_β. Если расположить 2^ν составных индексов в определенном порядке, то эти коэффициенты могут быть приняты за элементы матрицы порядка 2^ν; каждый отличный от нуля элемент равен с точностью до знака одной из координат x^0, x^1, $x^2, \ldots, x^{\nu'}$, которые мы будем считать за контравариантные составляющие вектора $\vec{x}$. *Мы сопоставляем таким образом каждому вектору $\vec{x}$ матрицу X порядка* 2^ν; эта матрица вполне определяется выбранным порядком в системе составных индексов. Например, если при $\nu=2$ индексы расположить в следующем порядке 0, 1, 2, 12, то получим (на основании соотношений (1), (2), (3))

$$X=\begin{pmatrix} x_0 & x^1 & x^2 & 0 \\ x^{1'} & -x^0 & 0 & x^2 \\ x^{2'} & 0 & -x^0 & -x^1 \\ 0 & x^{2'} & -x^{1'} & x^0 \end{pmatrix}.$$

В этом частном случае матрицы, соответствующие векторам базиса, имеют вид

$$H_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$H_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_{1'}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_{2'}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

94. Основная теорема. Основное свойство матрицы X, соответствующей некоторому вектору, заключается в следующем:

Теорема. *Квадрат матрицы X, соответствующей вектору, равен скалярному квадрату этого вектора.*

Для доказательства этой теоремы заметим, что единственные не равные нулю элементы a^β_α матрицы X (α обозначает номер строки, β — столбца) суть:

$$a^{i_1 i_2 \dots i_p}_{i_1 i_2 \dots i_p i_{p+1}} = x^{i'_{p+1}}, \quad a^{i_1 i_2 \dots i_p}_{i_1 i_2 \dots i_p} = (-1)^p x^0, \quad a^{i_1 i_2 \dots i_p i_{p+1}}_{i_1 i_2 \dots i_p} = x^{i_{p+1}}.$$

На основании этого элемент матрицы X^2, например:

$$b^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} = \sum_\alpha a^\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} a^{j_1 j_2 \dots j_q}_\alpha,$$

где суммирование распространено на 2^ν составных индексов, может быть отличен от нуля только в том случае, если $p-q$ равно 0, ± 1 или ± 2. Если $p-q=2$ или 1, то q индексов $j_1, j_2, \dots, j_q$ должны фигурировать среди индексов $i_1, i_2, \dots, i_p$; в случае $q-p=2$ или 1 должна иметь место обратная картина; наконец, если $p=q$, то у обоих составных индексов $i_1, i_2, \dots, i_p$ и $j_1, j_2, \dots, j_q$ должно быть по крайней мере $p-1$ общих индексов.

Если $p-q=2$, то даже те элементы $b^{j_1 j_2 \dots j_q}_{j_1 j_2 \dots j_q j_{q+1} j_{q+2}}$, которые мы отметили выше, равны нулю; в самом деле, эти элементы равны

$$a^{j_1 j_2 \dots j_q j_{q+1}}_{j_1 j_2 \dots j_q j_{q+1} j_{q+2}} a^{j_1 j_2 \dots j_q}_{j_1 j_2 \dots j_q j_{q+1}} + a^{j_1 j_2 \dots j_q j_{q+2}}_{j_1 j_2 \dots j_q j_{q+1} j_{q+2}} a^{j_1 j_2 \dots j_q}_{j_1 j_2 \dots j_q j_{q+2}} =$$

$$= x^{j'_{q+2}} x^{j'_{q+1}} - x^{j'_{q+1}} x^{j'_{q+2}} = 0;$$

то же самое имеем, если $q-p=2$. Тот же результат получается, если $q-p=1$ (или $p-q=1$), так как

$$b^{j_1 j_2 \dots j_q}_{j_1 j_2 \dots j_q j_{q+1}} = a^{j_1 j_2 \dots j_q}_{j_1 j_2 \dots j_q j_{q+1}} a^{j_1 j_2 \dots j_q}_{j_1 j_2 \dots j_q} + a^{j_1 j_2 \dots j_q j_{q+1}}_{j_1 j_2 \dots j_q j_{q+1}} a^{j_1 j_2 \dots j_q}_{j_1 j_2 \dots j_q j_{q+1}} =$$

$$= (-1)^q x^{j'_{q+1}} x^0 + (-1)^{q+1} x^0 x^{j'_{q+1}} = 0.$$

Наконец, если $p=q$, то мы должны исследовать элементы

$$b^{i_1 i_2 \dots i_p i_{p+2}}_{i_1 i_2 \dots i_p i_{p+1}} \quad \text{и} \quad b^{i_1 i_2 \dots i_p}_{i_1 i_2 \dots i_p}.$$

Первые равны нулю: доказательство аналогично предыдущему. Вторые равны

$$
\begin{aligned}
b^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{i_1 i_2 \ldots i_p} &= a^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{i_1 i_2 \ldots i_p} a^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{i_1 i_2 \ldots i_p} + \\
&+ \sum_k a^{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_p}_{i_1 i_2 \ldots i_p} a^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_p} + \\
&+ \sum_h a^{i_1 i_2 \ldots i_p h}_{i_1 i_2 \ldots i_p} a^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{i_1 i_2 \ldots i_p h} = \\
= (x^0)^2 &+ \sum_k (-1)^{p-k} x^{i'_k} (-1)^{p-k} x^{i_k} + \sum_h x^{i_h} x^{i'_h} = \\
&= (x^0)^2 + \sum_m x^m x^{m'} = \vec{x}^2.
\end{aligned}
$$

Из этой теоремы непосредственно вытекает, что

скалярное произведение двух векторов есть полусумма произведений двух соответствующих матриц.

Доказательство то же, что и для пространства E_3 (п. **55**, теорема III).

Отсюда вытекают следующие соотношения для матриц A_1, $A_2, \ldots, A_n$, соответствующих n взаимно перпендикулярным единичным векторам:

$$A_i^2 = 1, \quad A_i A_j = -A_j A_i.$$

95. Матрица, соответствующая p-вектору. p-вектору, определенному векторами $X_1, X_2, \ldots, X_p$, можно отнести матрицу

$$\frac{1}{p!}\sum \pm X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_p},$$

где сумма распространена на все перестановки индексов $1, 2, \ldots, p$, причем знак $+$ или $-$ берется в зависимости от того, четной или нечетной является перестановка $i_1, i_2, \ldots, i_p$; элементами этой матрицы являются линейные комбинации составляющих p-вектора. Мы будем обозначать матрицу, соответствующую p-вектору, символом $\underset{(p)}{X}$. Если p векторов взаимно перпендикулярны, то матрица, соответствующая p-вектору, равна $X_1 X_2 \ldots X_p$.

Пользуясь этим видом для матрицы, нетрудно показать, что квадрат матрицы $\underset{(p)}{X}$, соответствующей p-вектору, равен квадрату меры этого p-вектора, умноженному на $(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}$; например, если векторы X и Y взаимно перпендикулярны, то

$$(XY)^2 = XYXY = -XXYY = -X^2Y^2 = -m^2. \tag{5}$$

В дальнейшем мы увидим (п. 98), что матрицы, соответствующие двум различным p-векторам, различны и что матрица, соответствующая $(n-p)$-вектору, тождественна с матрицей, соответствующей некоторому p-вектору.

II. Представление вращений и отражений при помощи матриц порядка 2^ν

96. Симметрия, соответствующая единичному вектору. Как и в пространстве E_3, результат применения к вектору X симметрии относительно гиперплоскости Π, перпендикулярной к единичному вектору A, выражается формулой (п. 58)

$$X' = -AXA. \tag{6}$$

Для p-вектора $\underset{(p)}{X}$ имеем

$$\underset{(p)}{X'} = (-1)^p A\underset{(p)}{X}A. \tag{7}$$

Определим *a priori* результат применения симметрии к спинору ξ формулой

$$\xi' = A\xi; \tag{8}$$

мы расчленяем, таким образом, операцию симметрии на две, — в зависимости от того, выбираем ли за единичный вектор, перпендикулярный к гиперплоскости Π, A или $-A$.

Если мы исследуем, в частности, результат применения к спинору операторов базиса H_0, H_i, $H_{i'}$, то получим следующее:

Оператор H_0 оставляет инвариантной абсолютную величину каждой составляющей ξ_α, изменяя или не изменяя ее знак в зависимости от того, содержит ли составной индекс α нечетное или четное число простых индексов (относительно составляющей ξ_0 следует предполагать, что она содержит четное число простых индексов, равное нулю).

Оператор H_i $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ *обращает в нуль составляющие* ξ_α, *содержащие простой индекс* i, *и прибавляет этот индекс к тем составляющим, у которых* α *не содержит* i; например, H_3 преобразует ξ_{45} в ξ_{453} и обращает в нуль ξ_{23}.

Оператор $H_{i'}$ *обращает в нуль составляющие* ξ_α, *не содержащие индекса* i, *и отнимает этот индекс у тех, составной индекс* α *которых содержит* i *(при условии, что индекс* i *предварительно был переставлен на последнее место в составном индексе* α*)*; например, $H_{3'}$ превращает в нуль ξ_{45} и преобразует $\xi_{134} = -\xi_{143}$ в $-\xi_{14}$.

97. Представление вращения. Так как вращение является произведением четного числа симметрий $A_1, A_2, \ldots, A_{2k}$ $(k \leqslant \nu)$, то результат применения вращения к вектору или вообще p-вектору определяется формулой

$$\underset{(p)}{X'} = A_{2k}A_{2k-1}\ldots A_2A_1\underset{(p)}{X}A_1A_2\ldots A_{2k-1}A_{2k}. \tag{9}$$

Преобразование спинора при вращении выражается формулой

$$\xi' = A_{2k}A_{2k-1}\ldots A_2A_1\xi. \tag{10}$$

Если положить

$$A_{2k}A_{2k-1}\ldots A_2A_1 = S,$$

то предыдущие формулы примут следующий вид:

$$\underset{(p)}{X'} = S\underset{(p)}{X}S^{-1}, \qquad \xi' = S\xi. \tag{11}$$

Аналогично может быть выражено отражение

$$\underset{(p)}{X'} = (-1)^p T\underset{(p)}{X}T^{-1}, \qquad \xi' = T\xi, \tag{12}$$

причем матрица T является произведением нечетного числа $\leqslant 2\nu + 1$ матриц, соответствующих единичным векторам.

В частности, симметрия относительно начала, которая является произведением n симметрий, соответствующих n единичным взаимно перпендикулярным векторам $A_1, A_2, \ldots A_n$, выражается при помощи матрицы $A_1A_2\ldots A_n$, то есть матрицы, соответствующей n-вектору единичного объема. Для вычисления этой матрицы достаточно выбрать за эти n матриц матрицы

$$H_0, \quad H_k + H_{k'}, \quad i(H_k - H_{k'});$$

в самом деле,

$$i^2(H_k - H_{k'})^2 = (H_k + H_{k'})^2 = H_k H_{k'} + H_{k'} H_k;$$

третий член этого соотношения является удвоенным скалярным произведением векторов $\vec{e}_k$, $\vec{e}_{k'}$ то есть $2g_{kk'} = 1$. Образуя произведение, получаем с точностью до знака

$$i^{\nu} H_0 (H_{1'} H_1 - H_1 H_{1'}) \ldots (H_{\nu'} H_{\nu} - H_{\nu} H_{\nu'}).$$

Применяя правила, данные в конце п. 96, мы видим, что матрица $H_{1'}H_1 - H_1 H_{1'}$ умножает каждую составляющую ξ_{α} на плюс или минус единицу в зависимости от того, содержит или не содержит составной индекс α индекс 1. Следовательно, построенная выше матрица умножает каждую составляющую на i^{ν}. Отсюда вытекает

Теорема. *n-вектору единичного объема соответствует скалярная матрица i^{ν}, которая определяет симметрию относительно начала в применении к спинорам.*

98. Числа Клиффорда-Липшитца. В п. 48 была доказана неприводимость p-вектора относительно группы вращений. Если мы возьмем матрицу $\underset{(p)}{X}$, соответствующую произвольному p-вектору, то элементы этой матрицы, являющиеся линейными комбинациями составляющих p-вектора, при вращении преобразуются линейно между собой; отсюда следует, что или все они тождественно равны нулю (это невозможно), или линейные комбинации, которые они образуют, линейно независимы относительно C_n^p составляющих p-вектора. Отсюда, в частности, вытекает

Теорема. *Двум различным p-векторам соответствуют две различные матрицы $\underset{(p)}{X}$.*

Можно пойти дальше. Рассмотрим матрицу U порядка 2^{ν} с произвольными комплексными коэффициентами. $2^{2\nu}$ элементов этой матрицы могут быть рассматриваемы как составляющие тензора относительно группы вращений, если условиться, что вращение S преобразует матрицу U в SUS^{-1}. Из этого тензора порядка $2^{2\nu}$ можно выделить скаляр, вектор, бивектор, ..., ν-вектор: достаточно взять матрицы, соответствующие произвольному скаляру, произвольному вектору и т. д. Мы выделим, таким образом, из полного тензора $\nu+1$ неприводимых тензоров, не эквивалентных между собой; полное число составляющих этих $\nu+1$ тензоров равно

$$1+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^\nu=\frac{1}{2}2^n=2^{2\nu},$$

то есть оно равно числу составляющих полного тензора. Между этими $2^{2\nu}$ составляющими не может существовать линейных соотношений, так как в противном случае, на основании теоремы п. **34**, по крайней мере один из выделенных тензоров был бы равен тождественно нулю. Таким образом, мы получили следующую теорему:

Теорема. *Каждая матрица порядка 2^ν может быть разложена одним и только одним способом на сумму скаляра, вектора, бивектора, ... , ν-вектора.*

Матрицы порядка 2^ν можно рассматривать как числа гиперкомплексной системы с $2^{2\nu}$ единицами, построенной над полем комплексных чисел; принимая за единицы этой системы матрицу 1, матрицы A_i, соответствующие n единичным взаимно перпендикулярным векторам, их произведения по две, по три, ..., по ν, имеем правило умножения

$$A_i^2=1, \quad A_iA_j=-A_jA_i \quad (i\neq j).$$

Мы получаем систему гиперкомплексных чисел Клиффорда-Липшитца, применение которой к представлению вращений очевидно в силу сказанного выше[1]).

---

[1]) Относительно этих чисел см. статью: „Nombres complexes" в Encyclopedie des Sc. Math.; составленную Э. Картаном на основании статьи Штуди на немецком языке (Encycl.; I, 5, 1908, стр. 463—465). Относительно применения этих чисел в пространстве частного принципа относительности см. A. Mercier, *Expressions des équations de l'électromagnétisme au moyen des nombres de Clifford* (Thèse, Geneve, 1935) и G. Juvet, *Les ratations de l'espace euclidien à quatre dimensions, etc.* (Comment. Math. Helvet, 8, 1936, стр. 264—304).

Добавим, что матрица, соответствующая $(n-p)$-вектору $(p \leqslant \nu)$, тождественна с матрицей, соответствующей некоторому p-вектору, именно: произведению i^ν на p-вектор, дополнительный к данному $(n-p)$-вектору. Например, учитывая, что произведение $A_1A_2\ldots A_n$ равно i^ν, имеем

$$A_{p+1}A_{p+2}\ldots A_n =$$
$$= (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} (A_1A_2\ldots A_p)(A_1A_2\ldots A_p A_{p+1}\ldots A_n) =$$
$$= (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} i^\nu A_1A_2\ldots A_p.$$

99. Тензорный характер спинора. Формулы (11) и (12) показывают, что спинор дает линейное представление группы вращений и отражений. В самом деле, возьмем два вращения S, S'; если эти вращения последовательно применить к вектору X, мы получим результирующее вращение $S'S$:

$$X' = S'SXS^{-1}S'^{-1} = (S'S)X(S'S)^{-1};$$

будучи приложены последовательно к спинору, вращения S, S' дают то же самое вращение $S'S$. Следует отметить, что представление двузначно, так как каждое вращение или отражение сдваивается при приложении к спинору. Матрицы S являются как раз матрицами представления, определяемого спинорами.

Сдваивания избежать невозможно, по крайней мере, если потребовать, чтобы соответствие между вращениями и отражениями векторов, с одной стороны, и вращениями и отражениями спиноров, с другой, было непрерывно. Рассмотрим, например, симметрию A: можно непрерывным образом привести единичный вектор A в совпадение с единичным вектором $-A$; таким образом, мы переходим непрерывно от преобразования $\xi \to A\xi$ к преобразованию $\xi \to -A\xi$, причем обоим этим преобразованиям соответствует одно и то же преобразование над векторами.

100. Неприводимость спинора. Покажем, что, при применении к любой линейной комбинации $\sum a^\alpha \xi_\alpha$ составляющих спинора достаточного числа вращений, мы получим 2^ν линейно независимых комбинаций. Мы рассмотрим простые вращения на угол π, являющиеся произведениями двух симметрий, соответствующих двум единичным взаимно перпендикулярным векторам, а также произведения двух таких вращений; будем пользоваться, в частности, матрицами

$$i(H_k + H_{k'})(H_k - H_{k'}) = i(H_{k'}H_k - H_kH_{k'})$$

и

$$(H_i \pm H_{i'})(H_j \pm H_{j'}) \quad (i \neq j),$$

или, что приводится к тому же,

$$H_{i'}H_i - H_iH_{i'}, \quad H_iH_j, \quad H_iH_{j'}, \quad H_{i'}H_j, \quad (i \neq j).$$

Рассмотрим теперь линейную комбинацию $a^\alpha \xi_\alpha$ и предположим для определенности, что коэффициент при $\xi_{12\ldots p}$ не равен нулю. Применяя преобразование $H_{1'}H_1 - H_1H_{1'}$, мы не изменим в рассматриваемой форме коэффициентов при ξ_α, которые содержат индекс 1; остальные коэффициенты изменят знак. При помощи сложения получаем новую линейную комбинацию, в которую входят только ξ_α, содержащие индекс 1. Поступая так же относительно индексов $2, 3, \ldots, p$, мы получим новую комбинацию; в нее входят те ξ_α, которые содержат одновременно все индексы $1, 2, \ldots, p$. Применяя теперь матрицы $H_{(p+1)'}H_{p+1} - H_{p+1}H_{(p+1)'}, \ldots$, мы исключим при помощи вычитания все ξ_α, содержащие один из индексов $p+1, p+2, \ldots, \nu$. В результате видим, что из данной линейной комбинации мы можем выделить каждый не равный нулю член этой комбинации. Применение матрицы $H_{p'}H_{p+1}$ выводит из $\xi_{12\ldots p}$ составляющую $\xi_{12\ldots(p-1)(p+1)}$; следовательно, можно выделить все ξ_α с p индексами. Матрица $H_{(p-1)'}H_{p'}$ позволяет вывести отсюда все составляющие с $p-2$ индексами. Матрица $H_{p+1}H_{p+2}$ — все составляющие с $p+2$ индексами. Аналогичные операции дадут нам в конце концов все ξ_α с четным или же нечетным числом индексов. До сих пор мы не пользовались матрицей H_0. Матрицы H_0H_i и $H_0H_{i'}$ позволяют перейти от ξ_α с четным числом индексов к ξ_α с нечетным числом и обратно. Это доказывает неприводимость спинора относительно группы вращений, а следовательно, и относительно группы вращений и отражений. Между прочим, неприводимость относительно этой последней группы может быть доказана, как нетрудно видеть, без применения матрицы H_0.

III. Фундаментальная полярность в пространстве спиноров. p-векторы, определяемые парой спиноров

101. Матрица C. Рассмотрим преобразование, определяемое матрицей

$$C = (H_1 - H_{1'})(H_2 - H_{2'}) \ldots (H_\nu - H_{\nu'}).$$

Преобразование $H_1 - H_{1'}$ переводит составляющую $\xi_{12\ldots p}$ в $(-1)^p \xi_{23\ldots p}$, преобразование $H_2 - H_{2'}$ переводит эту последнюю в $(-1)^{p+(p-1)} \xi_{3\ldots p}$ и т. д.; наконец, применение $H_p - H_{p'}$ дает $(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \xi_0$, а последующие преобразования дают $(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \xi_{(p+1)(p+2)\ldots\nu}$. Если бы мы исходили из $\xi_{i_1 i_2 \ldots i_p}$, то в результате применения C получили бы

$$(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \xi_{i_{p+1} i_{p+2} \ldots i_\nu},$$

причем перестановка $(i_1, i_2, \ldots, i_\nu)$ предполагается четной. Таким образом, единственными элементами матрицы C, отличными от нуля, являются элементы

$$c_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{i_{p+1} \ldots i_\nu} = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}},$$

где $(i_1, i_2, \ldots, i_\nu)$ — четная перестановка.

Если при $\nu = 3$ строки и столбцы расположить в следующем порядке:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 23,\ 31,\ 12,\ 123,$$

то матрица C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Основное свойство матрицы C следующее:

Теорема. *При любом выборе вектора X*

$$CX = (-1)^{\nu} X^* C. \tag{13}$$

Достаточно проверить это соотношение для векторов базиса H_α. Замечая, что H_0 антикоммутирует с H_l и $H_{l'}$ имеем

$$CH_0 = (-1)^{\nu} H_0 C = (-1)^{\nu} H_0^* C;$$

затем

$$CH_l = (-1)^{\nu - l + 1} (H_1 - H_{1'}) \ldots$$
$$\ldots (H_{l-1} - H_{(l-1)'}) H_{l'} H_l (H_{l+1} - H_{(l+1)'}) \ldots (H_\nu - H_{\nu'}),$$
$$H_{l'} C = (-1)^{l-1} (H_1 - H_{1'}) \ldots$$
$$\ldots (H_{l-1} - H_{(l-1)'}) H_{l'} H_l (H_{l+1} - H_{(l+1)'}) \ldots (H_\nu - H_{\nu'});$$

так как $H_{l'} = H_l^*$, то формула доказана.

Если бы вместо вектора X мы взяли p-вектор $\underset{(p)}{X}$, то получили бы

$$C\underset{(p)}{X} = (-1)^{\nu p + \frac{p(p-1)}{2}} \underset{(p)}{X^*} C. \tag{14}$$

В самом деле, всегда можно предположить, что

$$\underset{(p)}{X} = X_1 X_2 \ldots X_p,$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_p$, суть p взаимно перпендикулярных векторов; имеем

$$C\underset{(p)}{X} = (-1)^{\nu p} X_1^* X_2^* \ldots X_p^* C =$$
$$= (-1)^{\nu p + \frac{p(p-1)}{2}} X_p^* X_{p-1}^* \ldots X_1^* C,$$

что и требовалось доказать.

Отметим, наконец, следующие два свойства:

$$CC^* = 1, \quad C^2 = (-1)^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}}; \tag{15}$$

первое вытекает из того, что

$$(H_l - H_{l'})(H_l - H_{l'})^* = (H_l - H_{l'})(H_{l'} - H_l) = \\ = H_l H_{l'} + H_{l'} H_l = 1,$$

так как скалярное произведение векторов H_l и $H_{l'}$ равно $\frac{1}{2}$.

Второе следует из того, что C соответствует ν-вектору, образованному из ν взаимно перпендикулярных векторов, причем квадратный скаляр каждого равен -1; поэтому C^2 равно

$$(-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}(-1)^\nu = (-1)^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}}.$$

102. Фундаментальная полярность. Рассмотрим два спинора $\vec{\xi}$, $\vec{\xi'}$ и скаляр

$$\xi^* C \xi',$$

где через ξ^* обозначена матрица с 1 строкой и 2^ν столбцами, через ξ' — матрица с 2^ν строками и 1 столбцом. Эта величина не меняется по абсолютному значению, если к $\vec{\xi}$ и $\vec{\xi'}$ применить одно и то же вращение; в самом деле, она преобразуется в

$$\xi^* A^* C A \xi';$$

но на основании (13) имеем:

$$A^* C = (-1)^\nu C A,$$

откуда

$$A^* C A = (-1)^\nu C A^2 = (-1)^\nu C;$$

таким образом, рассматриваемая форма при преобразовании только умножается на $(-1)^\nu$. Если ν четное, имеем инвариант при вращении и отражении; если ν нечетное, эта величина меняет знак при отражении. В последнем случае она дает тензор, эквивалентный n-вектору.

Соотношение

$$\xi^* C \xi' = 0,$$

билинейное относительно составляющих двух спиноров, определяет в пространстве спиноров *полярность* в том смысле, что это соотношение симметрично относительно обоих спиноров.

В самом деле, так как левая часть является скаляром, то она не меняется при операции транспонирования; поэтому

$$\xi^* C\xi' = \xi'^* C^* \xi = (-1)^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}} \xi'^* C\xi,$$

то есть рассматриваемое соотношение действительно симметрично относительно обоих спиноров.

Полученная таким образом фундаментальная полярность — первого рода (полярность относительно квадрики*)), если $(-1)^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}} = 1$; в этом случае она получается из квадратичной формы $\xi^* C\xi$. Если $(-1)^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}} = -1$, то мы имеем полярность второго рода (полярность относительно линейного комплекса); она определяется внешней формой $[\xi^* C\xi]$.

При $\nu = 1$ имеем

$$\xi^* C\xi' = \xi_0\xi'_1 - \xi_1\xi'_0 = [\xi_0\xi_1];$$

при $\nu = 2$:

$$\xi^* C\xi' = \xi_0\xi'_{12} - \xi_1\xi'_2 + \xi_2\xi'_1 - \xi_{12}\xi'_0 = [\xi_0\xi_{12}] - [\xi_1\xi_2];$$

при $\nu = 3$:

$$\frac{1}{2}\xi^* C\xi = \xi_0\xi_{123} - \xi_1\xi_{23} - \xi_2\xi_{31} - \xi_3\xi_{12};$$

наконец, при $\nu = 4$:

$$\frac{1}{2}\xi^* C\xi = \xi_0\xi_{1234} - \xi_1\xi_{234} + \xi_2\xi_{134} - \xi_3\xi_{124} +$$
$$+ \xi_4\xi_{123} - \xi_{12}\xi_{34} - \xi_{23}\xi_{14} - {}_{31}\xi_{24}.$$

В дальнейшем мы увидим, что в пространстве спиноров фундаментальная полярность является единственной полярностью, инвариантной при группе вращений.

---

*) Задаваемой уравнением $\xi^* C\xi = 1$. (*Прим. ред.*)

103. Приведение тензора $\xi_\alpha \xi'_\beta$. Мы показали, что билинейная форма $\xi^* C \xi'$ определяет тензор с одной составляющей относительно группы вращений и отражений; этот тензор является скаляром, если ν четное; он эквивалентен n-вектору, если ν нечетное. Рассмотрим теперь тензор $\xi_\alpha \xi'_\beta$, являющийся произведением двух спиноров. Этот тензор имеет $2^{2\nu}$ составляющих. Он является приводимым; мы покажем, что он вполне приводим, и разложим его на неприводимые части.

Образуем для этого форму

$$\xi^* C \underset{(p)}{X} \xi'$$

где $\underset{(p)}{X}$ — некоторый неопределенный p-вектор $(p \leqslant \nu)$. Применяя симметрию A одновременно к спинорам $\vec{\xi}$, $\vec{\xi'}$ и p-вектору $\underset{(p)}{X}$, мы преобразуем эту форму, учитывая соотношения (7), (8), (14), в следующую:

$$(-1)^p \xi^* A^* C A \underset{(p)}{X} \xi' = (-1)^{p+\nu} \xi^* C \underset{(p)}{X} \xi';$$

таким образом, при этом преобразовании она умножается на $(-1)^{\nu+p} = (-1)^{\nu-p}$. Она дает, следовательно, скаляр, если $\nu - p$ четно, и тензор, эквивалентный n-вектору, если $\nu - p$ нечетно.

В первом случае эта форма, если ее расположить по контравариантным составляющим $x^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}$ p-вектора $\underset{(p)}{X}$, имеет вид

$$x^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} = y_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p},$$

причем $y_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}$ являются билинейными формами от ξ и ξ'. Согласно основной теореме (п. 27) $y_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}$ образуют эквивалентный p-вектору тензор, у которого $y_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}$ являются ковариантными составляющими.

Во втором случае коэффициенты при $x^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}$ являются составляющими $(n-p)$-вектора.

Отметим, что в первом случае p, а во втором $n-p$ одинаковой четности с ν.

Из изложенного вытекает, что из тензора $\xi_\alpha \xi'_\beta$ можно выделить $\nu + 1$ неприводимых тензоров. Полное число составляющих этих $\nu+1$ тензоров равно (полагаем последовательно $p=0, 1, 2, \ldots, \nu$)

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^\nu=\frac{1}{2}(C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^{n-1}+$$
$$+C_n^n)=2^{n-1}=2^{2\nu};$$

оно равно, таким образом, числу составляющих тензора $\xi_\alpha\xi'_\beta$. С другой стороны, на основании общей теоремы (п. 34) мы знаем, что совокупность тождественных линейных соотношений между составляющими $\nu+1$ неприводимых тензоров должна обращать тождественно в нуль все составляющие по крайней мере одного из этих тензоров; но между тем ни один из найденных тензоров не равен тождественно нулю, так как величина $\xi^* C \underset{(p)}{X} \xi'$ не может быть равна нулю при произвольном выборе спиноров ξ, ξ' и p-вектора $\underset{(p)}{X}$.

Из приведенных рассуждений следует, что $2^{2\nu}$ составляющих полученных $\nu+1$ неприводимых тензоров линейно независимы, а потому тензор $\xi_\alpha\xi'_\beta$ может быть разложен на $\nu+1$ неприводимых частей. Эти различные неприводимые тензоры мы обозначим через $\mathfrak{T}_p$.

104. Неприводимые симметрические и антисимметрические части тензора $\xi_\alpha\xi'_\beta$. Ясно, что каждый неприводимый тензор, составляющие которого суть билинейные формы от ξ_α и ξ'_β, является или симметрическим или антисимметрическим. Чтобы исследовать, какой мы имеем случай, поступаем, как и выше Принимая во внимание формулу (14), имеем

$$\xi^* C \underset{(p)}{X} \xi' = \xi'^* \underset{(p)}{X}{}^* C^* \xi = (-1)^{\nu p+\frac{p(p-1)}{2}} \xi'^* C^* \underset{(p)}{X} \xi =$$
$$=(-1)^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}+\nu p+\frac{p(p-1)}{2}} \xi'^* C \underset{(p)}{X} \xi,$$

но

$$(-1)^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}+\nu p+\frac{p(p-1)}{2}}=(-1)^{\frac{(\nu-p)(\nu-p+1)}{2}}.$$

Следовательно, если $\nu-p\equiv 0$ или $-1 \pmod 4$, тензор $\mathfrak{T}$ симметрический; если $\nu-p\equiv 1$ или $2 \pmod 4$, он антисимметрический.

Таким образом, *симметрические тензоры эквивалентны q-векторам, если* $q\equiv\nu \pmod 4$; *антисимметрические тензоры эквивалентны q-векторам, если* $q\equiv\nu+2 \pmod 4$.

Симметрические тензоры эквив лентны тем, которые получаются при подстановке $\xi'_\alpha=\xi_\alpha$; они дают разложение тензора $\xi_\alpha\xi_\beta$ с $2^{\nu-1}(2^\nu+1)$ составляющими. Между прочим, нетрудно проверить, что сумма коэффициентов $C^p_{2\nu+1}$ бинома, у которых верхний индекс равен ν плюс или минус кратное 4, равна $2^{\nu-1}(2^\nu+1)$.

105. ν-вектор, соответствующий спинору. Один из этих тензоров очень важен; это тензор $\mathfrak{T}_\nu$. Он эквивалентен ν-вектору. Мы подсчитаем его составляющие для $\nu=2$.

Для этого надо рассмотреть выражение $\xi^*\underset{(2)}{CX}\xi$; для ковариантных составляющих бивектора имеем

$$\left.\begin{aligned}
&x_{01}=\xi^*CH_0H_1\xi=-2\xi_1\xi_{12}, && x_{02}=\xi^*CH_0H_2\xi=-2\xi_2\xi_{12},\\
&x_{01'}=\xi^*CH_0H_{1'}\xi=-2\xi_0\xi_2, && x_{02'}=\xi^*CH_0H_{2'}\xi=2\xi_0\xi_1,\\
&x_{11'}=\frac{1}{2}\xi^*C(H_1H_{1'}-H_{1'}H_1)\xi=-\xi_0\xi_{12}-\xi_1\xi_2, &&\\
&x_{22'}=\frac{1}{2}\xi^*C(H_2H_{2'}-H_{2'}H_2)\xi=-\xi_0\xi_{12}+\xi_1\xi_2, &&\\
&x_{12}=\xi^*CH_1H_2\xi=-\xi_{12}^2, && x_{1'2'}=\xi^*CH_{1'}H_{2'}\xi=-\xi_0^2,\\
&x_{12'}=\xi^*CH_1H_{2'}\xi=\xi_1^2, && x_{1'2}=\xi^*CH_{1'}H_2\xi=\xi_2^2.
\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

В начале этой главы мы видели, что при $\nu=2$ каждый спинор позволяет определить, по крайней мере, если $\xi_0\neq 0$, изотропное образующее многообразие двух измерений (2-плоскость). В то же время мы можем отнести каждому спинору бивектор. Нетрудно видеть, что *этот бивектор лежит в этой изотропной плоскости*. Ограничимся сначала для проверки случаем спинора, у которого все составляющие, за исключением ξ_0, равны нулю; в этом случае изотропная 2-плоскость, соответствующая этому тензору, определяется уравнениями

$$x^0 = x^{1'} = x^{2'} = 0;$$

контравариантные составляющие каждого бивектора, лежащего в этой 2-плоскости, равны нулю, за исключением x^{12}; другими словами, все его ковариантные составляющие равны нулю, за исключением $x_{1'2'}$. Но бивектор $\mathfrak{T}_2$, определяемый рассматриваемым спинором, обладает как раз этим свойством, так как единственная его ковариантная составляющая, отличная от нуля, есть $x_{1'2'} = -\xi_0^2$. Этот результат является общим и распространяется на все значения ν, как это мы сейчас покажем.

IV. Простые спиноры и интерпретация их как поляризованных изотропных ν-векторов

Рассматривая в начале этой главы (п. 92) изотропные ν-плоскости, мы пришли к системе 2^ν линейных уравнений с n переменными x^0 x^i, $x^{i'}$, коэффициенты которых являются 2^ν составляющими спинора. Эти уравнения определяют ν-плоскость, если при ξ_0, отличном от нуля, между составляющими спинора существуют квадратичные соотношения а) и b), определяющие через ξ_0, ξ_i, ξ_{ij} составляющие ξ, имеющие больше двух индексов. Эти 2^ν уравнений выражаются матричным уравнением $X\xi = 0$.

106. Простые спиноры и изотропные ν-плоскости. Мы будем называть ненулевой спинор *простым*, если ранг системы этих уравнений равен $\nu + 1$; они определяют тогда ν-плоскость, являющуюся изотропной, так как если вектор $\vec{x}$ удовлетворяет этим уравнениям, то

$$XX\xi = X^2\xi = \vec{x}^2\xi = 0, \quad \text{откуда} \quad \vec{x}^2 = 0.$$

Обратно, каждая изотропная ν-плоскость может быть определена простым спинором: мы показали в том случае, когда из уравнений этой ν-плоскости не вытекает никакого линейного соотношения между $x^1, x^2, \ldots, x^\nu$: соответствующий ему простой спинор имеет составляющую ξ_0, отличную от нуля.

Чтобы доказать, что указанный результат имеет место в общем случае, достаточно установить следующие две леммы.

Лемма I. *Спинор, получающийся из простого при помощи вращения или симметрии, является также простым, причем ν-плоскость, соответствующая преобразованному спинору, получается из ν-плоскости исходного при помощи того же вращения или симметрии.*

В самом деле, пусть ξ — простой спинор, X — вектор соответствующей ν-плоскости; при помощи симметрии A получаем спинор $\xi' = A\xi$ и вектор $X' = -AXA$, причем

$$X'\xi' = -AXA^2\xi = -AX = 0;$$

так как векторы X' образуют изотропную плоскость, то лемма доказана.

Лемма II. *Две изотропные ν-плоскости могут быть всегда преобразованы одна в другую при помощи вращения или отражения.*

В самом деле, рассмотрим две изотропные ν-плоскости, имеющие общую p-плоскость; обозначим через X вектор первой ν-плоскости, не принадлежащий ко второй; этот вектор не может быть перпендикулярен ко всем векторам второй ν-плоскости, так как $(\nu+1)$-плоскость, содержащая вторую ν-плоскость и вектор X, была бы изотропна, что невозможно. Пусть X' — вектор второй ν-плоскости, не перпендикулярный к X; вектор $X' - X$ не изотропен, так как в противном случае мы имели бы

$$(X' - X)^2 = X'^2 + X^2 - (XX' + X'X) = -(XX' + X'X) = \\ = -2\vec{x}\,\vec{x}' = 0.$$

Симметрия $X' - X$ (относительно плоскости, перпендикулярной к отрезку, соединяющему концы векторов X и X', и проходящей через середину этого отрезка) оставляет инвариантной p-плоскость, общую двум данным ν-плоскостям, так как эта p-плоскость перпендикулярна к $X' - X$; кроме того, она преобразует X в X'; она преобразует, таким образом, первую ν-плоскость в другую, имеющую со второй ν-плоскостью общую $(p+1)$-плоскость. Повторяя несколько раз это же преобразование, мы совместим обе данные ν-плоскости при помощи некоторого числа $\leqslant \nu$ симметрий.

Можно добавить к этому, что в рассматриваемом случае нечетного n можно всегда осуществить это совмещение при помощи вращения, так как в $(\nu+1)$-плоскости, перпендикулярной к изотропной ν-плоскости, существует неизотропный вектор, перпендикулярный к этой ν-плоскости, и, следовательно, существует симметрия, оставляющая инвариантной ν-плоскость.

Вернемся к нашему предложению. Каждая изотропная ν-плоскость может быть получена при помощи вращения из ν-плоскости

$$x^0 = x^{1'} = x^{2'} = \ldots = x^{\nu'} = 0;$$

применим это вращение к спинору, у которого составляющие, отличные от ξ_0, равны нулю; на основании леммы I мы получим простой спинор, соответствующий данной изотропной плоскости. Мы приходим, таким образом, к следующей общей теореме.

Теорема. *Каждая изотропная ν-плоскость определяется при помощи простого спинора. Простые спиноры образуют совокупность, инвариантную при вращениях и отражениях.*

107. Простые спиноры обращают в нуль симметрические тензоры, отличные от $\mathfrak{T}_\nu$. Теперь мы охарактеризуем алгебраически простые спиноры. Покажем сначала, что каждый простой спинор превращает в нуль составляющие различных симметрических тензоров $\mathfrak{T}_p$ $(p \neq \nu)$, входящих в разложение тензора $\xi_\alpha \xi_\beta$.

Прежде всего это предложение справедливо для простого спинора, у которого все составляющие, за исключением ξ_0, равны нулю. Рассмотрим симметрический тензор $\mathfrak{T}_p$, получающийся из выражения

$$\xi^* C \underset{(p)}{X} \xi;$$

если все ξ_α, за исключением ξ_0, равны нулю, то это выражение равно ξ_0^2, умноженному на коэффициент при ξ_0 в составляющей ξ_0, преобразованной матрицей $C\underset{(p)}{X}$, то есть на коэффициент при ξ_0 в составляющей $\xi_{12\ldots\nu}$, преобразованной матрицей $\underset{(p)}{X}$. Но в составляющую $\xi_{12\ldots\nu}$, преобразованную матрицей X вектора, входят только те составляющие ξ_α, которые имеют *по крайней мере* $\nu-1$ индексов; применяя вторую матрицу вектора, мы получим выражение, содержащее только те ξ_α, которые имеют по крайней мере $\nu-2$ индексов и т. д. Так как $p<\nu$, то составляющая ξ_0 не входит в искомую составляющую $\xi_{12\ldots\nu}$, преобразованную матрицей $\overset{(p)}{X}$.

Так как каждый простой спинор может быть получен (лемма II) из рассмотренного спинора частного вида, то тензор $\mathfrak{T}_p$ также равен нулю для этого спинора, что и требовалось доказать.

Докажем теперь обратное, — что *каждый спинор, обращающий в нуль симметрические тензоры $\mathfrak{T}_p$, отличные от $\mathfrak{T}_\nu$, — простой.* В самом деле, на основании самого определения простых спиноров они характеризуются целыми алгебраическими соотношениями. Рассмотрим среди этих соотношений *все квадратичные.* Эти соотношения обладают тензорным характером в том смысле, что левые их части образуют тензор, так как в целом их совокупность, конечно, инвариантна при вращении и отражении. На основании прямой теоремы мы знаем, что среди этих квадратичных соотношений фигурируют все те, которые получаются приравниванием нулю симметрических тензоров $\mathfrak{T}_p$, отличных от $\mathfrak{T}_\nu$. *Других соотношений существовать не может,* так как рассматриваемые соотношения, будучи линейными относительно составляющих тензора $\xi_\alpha\xi_\beta$, могут быть получены только (п. 34) приравниванием нулю одной или нескольких из *неприводимых* частей этого тензора; но $\mathfrak{T}_\nu$ не может фигурировать среди этих частей: в противном случае все составляющие $\xi_\alpha\xi_\beta$, то есть и все ξ_α, были бы равны нулю; мы пришли к абсурду. Следовательно, *совокупность квадратичных соотношений, характеризующих простые спиноры, совпадает с той, которая получается приравниванием нулю симметрических тензоров $\mathfrak{T}_p$, отличных от $\mathfrak{T}_\nu$.*

108. Алгебраическая характеристика простых спиноров. Рассмотрим спинор, обращающий в нуль все эти тензоры; его составляющие удовлетворяют соотношениям a) и b) (п. 92)

$$\xi_0\xi_{123}=\xi_1\xi_{23}+\xi_2\xi_{31}+\xi_3\xi_{12},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

которые необходимо имеют место для составляющих простого спинора; если $\xi_0 \neq 0$, то эти необходимые соотношения являются и достаточными, как это показывает начало главы, для того чтобы спинор был простым; следовательно, каждый спинор с составляющей $\xi_0 \neq 0$, обращающий в нуль симметрические тензоры $\mathfrak{T}_p$, отличные от $\mathfrak{T}_\nu$, — простой. То же самое имеем в том случае, если $\xi_0 = 0$, так как из ξ можно получить преобразованием новый спинор с составляющей $\xi'_0 \neq 0$[1]), который обращает в нуль те же составляющие тензора и поэтому является простым; следовательно, ξ, получающийся преобразованием из простого тензора, сам является простым.

Теорема. *Спинор является простым тогда и только тогда, если его составляющие обращают в нуль все тензоры, определяемые выражениями*

$$\xi^* \underset{(p)}{CX} \xi \quad [p < \nu, \ \nu - p \equiv 0 \text{ или } 3 \pmod 4].$$

В пространстве спиноров простые спиноры образуют, таким образом, алгебраическое многообразие, определяемое линейно независимыми квадратичными уравнениями в числе $\sum\limits_p C^p_{2\nu+1}$, то есть

$$2^{\nu-1}(2^\nu + 1) - C^\nu_{2\nu+1}.$$

Это число равно:

$$1 \text{ для } \nu = 3, \qquad 10 = C^0_9 + C^1_9 \text{ для } \nu = 4,$$

$$66 = C^1_{11} + C^2_{11} \text{ для } \nu = 5, \qquad 364 = C^2_{13} + C^3_{13} \text{ для } \nu = 6.$$

109. Изотропный ν-вектор, соответствующий простому спинору. Рассмотрим простой спинор; тензор $\mathfrak{T}_\nu$ позволяет отнести этому простому спинору, как и вообще каждому спинору, ν-вектор (п. 105). Мы покажем, что этот ν-вектор лежит в изотропной ν-плоскости, определенной спинором. Достаточно проверить это для какого-нибудь спинора частного вида, так

---

[1]) В самом деле, если бы спиноры, преобразованные из данного, имели составляющую ξ_0, равную нулю, то наименьшее подпространство, содержащее все эти преобразованные спиноры, было бы инвариантно при группе вращений; так как это подпространство самое большее $2^\nu - 1$ измерений, то это противоречит неприводимости спиноров.

как применением вращения мы распространим это на любые простые спиноры. Возьмем снова спинор, у которого все составляющие, за исключением ξ_0, равны нулю. Рассуждение, которое применялось при доказательстве леммы II, показывает, что единственная отличная от нуля ковариантная составляющая ν-вектора получается из ν-вектора $\underset{(\nu)}{X}$, являющегося произведением ν-векторов $H_{i'}$, так как $H_{i'}$ — единственные векторы базиса, обладающие тем свойством, что их применение к составляющей ξ уменьшает на единицу число ее индексов. Следовательно, единственная отличная от нуля ковариантная составляющая ν-вектора, соответствующего спинору, есть

$$x_{1'2'\ldots\nu'} = \xi^* CH_{1'}H_{2'}\ldots H_{\nu'}\xi = (-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}\xi_0^2.$$

ν-плоскость этого ν-вектора определяется уравнениями

$$x^0 = x^{1'} = x^{2'} = \ldots = x^{\nu'} = 0;$$

это — изотропная ν-плоскость, определяемая рассматриваемым спинором.

Отсюда вытекает важное следствие. *Каждый простой спинор может быть определен как изотропный поляризованный ν-вектор.* Если задан изотропный ν-вектор, то составляющие спиноры определены (с точностью до общего знака) выражениями тензора $\mathfrak{T}_\nu$; для $\nu = 2$ это — выражения (16), данные в п. 105.

Вполне очевидно, что каждый спинор можно рассматривать, и притом бесконечным числом способов, как сумму простых спиноров; это дает также геометрическую интерпретацию спиноров общего вида.

Интересно отметить, что как понятие спинора может быть выведено из понятия вектора, так и обратно—понятие вектора может быть выведено из понятия спинора: прежде всего при помощи спинора можно построить изотропный ν-вектор, затем можно определить ν-вектор общего вида как сумму изотропных ν-векторов и вектор — как элемент, общий семейству ν-векторов, удовлетворяющих определенным условиям.

110. Пересечение двух изотропных ν-плоскостей. Обозначим через $[\xi]$ изотропную ν-плоскость, определяемую простым спинором ξ. Пересечение двух изотропных ν-плоскостей

$[\xi]$ и $[\xi']$ есть изотропная p-плоскость, причем p может изменяться от 0 (в этом случае эти ν-плоскости не имеют общих прямых) до ν (когда они совпадают).

Существует по крайней мере один неизотропный вектор, перпендикулярный к обеим ν-плоскостям; в самом деле, геометрическое место перпендикуляров к этим двум ν-плоскостям определяется $2\nu - p$ независимыми линейными уравнениями, то есть является $(p+1)$-плоскостью, содержащей p-плоскость, общую рассматриваемым ν-плоскостям. Таким образом, существует прямая, перпендикулярная к обеим ν-плоскостям и не принадлежащая к их общей p-плоскости. Эта прямая не может быть изотропной, так как в противном случае она определяла бы с каждой из рассматриваемых ν-плоскостей изотропную $(\nu+1)$-плоскость, что невозможно. С другой стороны, не будучи изотропной, она не может лежать в $(2\nu - p)$-плоскости, которая содержит данные две ν-плоскости и к которой эта прямая перпендикулярна.

При помощи вращения можно всегда единичный вектор, лежащий на этой прямой, совместить с H_0, а ν-плоскость $[\xi']$ — с плоскостью, определяемой векторами $H_1, H_2, \ldots, H_\nu$; наконец, можно предположить, что p-плоскость, общая обеим ν-плоскостям, определяется векторами $H_1, H_2, \ldots, H_p$. Каждый вектор ν-плоскости $[\xi]$ является линейной комбинацией векторов $H_1, H_2, \ldots, H_p, H_{1'}, H_{2'}, \ldots, H_{p'}, H_{(p+1)'}, \ldots, H_{\nu'}$; но из условия, что он перпендикулярен к H_1, вытекает, что $H_{1'}$ не может входить в эту комбинацию; то же самое относится к $H_{2'}, \ldots, H_{p'}$. Итак, ν-плоскость $[\xi]$ можно определить при помощи ν векторов

$$H_1, H_2, \ldots, H_p, K_{p+1}, \ldots, K_\nu,$$

причем

$$K_{p+1} = H_{(p+1)'} + a_{11} H_{p+1} + \ldots + a_{1(\nu-p)} H_\nu,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$K_\nu = H_{\nu'} + a_{(\nu-p)1} H_{p+1} + \ldots + a_{(\nu-p)(\nu-p)} H_\nu\ [1].$$

Тогда скалярные произведения векторов

$$H_0, H_1, \ldots, H_p, H_{p+1}, \ldots, H_\nu, H_{1'}, H_{2'}, \ldots, H_{p'}; K_{p+1}, \ldots, K_\nu, \qquad \text{(a)}$$

[1]) Коэффициенты a_{ij} не произвольны.

те же самые, что и у векторов

$$H_0,\ H_1, \ldots,\ H_p,\ H_{p+1}, \ldots,\ H_\nu;$$
$$H_{1'},\ H_{2'}, \ldots,\ H_{p'},\ H_{(p+1)'}, \ldots,\ H_\nu; \tag{b}$$

таким образом, векторы (a) образуют репер, конгруэнтный координатному реперу, то есть при помощи вращения или отражения можно обе данные ν-плоскости совместить соответственно с ν-плоскостями

$$[H_1H_2 \ldots H_pH_{p+1} \ldots H_\nu] \text{ и } [H_1H_2 \ldots H_pH_{(p+1)'} \ldots H_{\nu'}],$$

у которых уравнения соответственно следующие:

$$x^0 = x^{1'} = x^{2'} = \ldots = x^{p'} = x^{(p+1)'} = \ldots = x^{\nu'} = 0,$$
$$x^0 = x^{1'} = x^{2'} = \ldots = x^{p'} = x^{p+1} = \ldots \quad = x^\nu = 0.$$

У соответствующего простого спинора ξ' все составляющие кроме ξ'_0 равны нулю, у спинора ξ не равна нулю только составляющая $\xi_{(p+1)(p+2)\ldots\nu}$. В самом деле, для второго спинора уравнения

$$H_1\xi = \ldots = H_p\xi = 0, \qquad H_{(p+1)'}\xi = \ldots = H_{\nu'}\xi = 0$$

показывают, что все ξ_α, содержащие один из индексов $1, 2, \ldots, p$, равны нулю, так же как и те составляющие, у которых отсутствует один из индексов $p+1, p+2, \ldots, \nu$; таким образом, остается не равной нулю только одна составляющая $\xi_{(p+1)(p+2)\ldots\nu}$.

111. Условие того, что пересечение двух изотропных ν-плоскостей имеет p измерений. Полученный в предыдущем параграфе результат позволяет нам найти непосредственно необходимые и достаточные условия того, что пересечение двух изотропных ν-плоскостей $[\xi]$ и $[\xi']$ является плоскостью p измерений. В самом деле, если эта плоскость p-мерна, то все тензоры $\mathfrak{T}_0, \mathfrak{T}_1 \ldots, \mathfrak{T}_{p-1}$, определяемые парой спиноров ξ и ξ', равны нулю; достаточно доказать это для двух ν-плоскостей, определенных выше. Если мы образуем величину

$$\xi'^* CX\xi,$$

где $\underset{(q)}{X}$ — произвольный q-вектор $(q<p)$, то эта величина является произведением $\xi'_0 \xi_{(p+1)\ldots\nu}$ на коэффициент при $\xi_{(p+1)(p+2)\ldots\nu}$ в ξ_0, преобразованной матрицей CX, то есть $\xi_{12\ldots\nu}$, преобразованной матрицей $\underset{(q)}{X}$. Но $\underset{(q)}{X}$ является суммой произведений q матриц H_α; так как матрица H_α, примененная к составляющей ξ_β, уменьшает число простых индексов этой составляющей самое большее на единицу, то матрица $\underset{(q)}{X}$, примененная к составляющей $\xi_{12\ldots\nu}$, дает выражение, в которое не может входить составляющая $\xi_{(p+1)\ldots\nu}$. А это и требовалось доказать.

Наоборот, тензор $\mathfrak{T}_p$, определяемый величиной $\xi'^* C \underset{(p)}{X} \xi$, не равен нулю, так как, выбирая $\underset{(p)}{X} = H_1 H_2 \ldots H_p$, мы получим $\pm \xi'_0 \xi_{(p+1)\ldots\nu}$; кроме того, мы видим, что p-вектор $\mathfrak{T}_p$ лежит в p-плоскости, общей обеим ν-плоскостям.

Отсюда вытекает следующая

Теорема. *Пересечение двух изотропных ν-плоскостей $[\xi]$ и $[\xi']$ тогда и только тогда является плоскостью p измерений, если тензоры $\mathfrak{T}_q$ [q-векторы или $(n-q)$-векторы], определяемые парой спиноров ξ, ξ', равны нулю при $q=0$, $1, \ldots, p-1$, но тензор $\mathfrak{T}_p$ не равен нулю.*

Например, *для того чтобы две изотропные ν-плоскости имели общую прямую, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\xi^* C \xi' \equiv \xi_0 \xi'_{12\ldots\nu} - \xi_1 \xi'_{2\ldots\nu} - \ldots - \xi_{12}\xi'_{3\ldots\nu} + \ldots +$$

$$+ (-1)^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}} \xi_{12\ldots\nu} \xi'_0 = 0,$$

то есть, *чтобы простые спиноры ξ и ξ' были сопряженными относительно фундаментальной полярности.*

Добавим следующее замечание. Если теперь $\mathfrak{T}_q$ равен нулю, то равны нулю и тензоры $\mathfrak{T}_{q-1}, \ldots, \mathfrak{T}_0$.

В самом деле, вопрос можно всегда привести к случаю, когда одна из ν-плоскостей соответствует простому спинору ξ', у которого все составляющие, за исключением ξ'_0, равны нулю. Выражая условие, что величина

$$\xi'^{*} \underset{(q)}{CX} \xi$$

тождественно равна нулю, мы получим, принимая

$$\underset{(q)}{X} = H_{i'_1} H_{i'_2} \dots H_{i'_q},$$

$$\underset{(q)}{X} = H_0 H_{i'_1} H_{i'_2} \dots H_{i'_{q-1}},$$

$$\underset{(q)}{X} = H_{i'_1} H_{i'_2} \dots H_{i'_{q-2}} \left(H_{i_{q-1}\, i'_{q-1}} - H_{i'_{q-1}} H_{i_{q-1}} \right),$$

что все составляющие спинора ξ, имеющие $\nu - q$ простых индексов, $\nu - q + 1$ простых индексов, $\nu - q + 2$ простых индексов и т. д., равны нулю. Отсюда следует, что величина $\xi^{*} \underset{(q-1)}{CX} \xi$ тождественно равна нулю.

V. Случай вещественного эвклидова пространства

Рассмотрим группу *вещественных* вращений и отражений. Мы не будем менять выбранного выражения для фундаментальной формы; достаточно предполагать координату x^0 вещественной, а x^i и $x^{i'}$ комплексно сопряженными. Каждое вращение и в рассматриваемом случае есть произведение четного числа $\leqslant 2\nu$ симметрий, соответствующих *вещественным* единичным векторам A; каждое отражение есть произведение нечетного числа $\leqslant 2\nu + 1$ таких симметрий.

112. Сопряженные векторы и p-векторы. Из векторов базиса $\vec{e}_0, \vec{e}_i, \vec{e}_{i'}$ первый вещественный, остальные попарно комплексно сопряженные. Отметим, что соответствующие матрицы H_0, H_i, $H_{i'}$ обладают тем свойством, что две матрицы, соответствующие комплексно сопряженным векторам, являются взаимно транспонированными. Следовательно, рассматривая матрицы X и Y двух комплексно сопряженных векторов, будем иметь

$$X = x^0 H_0 + x^i H_i + x^{i'} H_{i'},$$
$$Y = \bar{x}^0 H_0^* + \bar{x}^i H_i^* + \bar{x}^{i'} H_{i'}^*,$$

откуда

$$Y = \bar{X}^*.$$

В частности, *матрица вещественного вектора является эрмитовой*:

$$\bar{X} = X^*.$$

Переходя от векторов к p-векторам, получим, что p-вектор, сопряженный с $\underset{(p)}{X}$, *есть* $(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \underset{(p)}{\bar{X}^*}$. Таким образом, *вещественный p-вектор имеет эрмитову матрицу, если* $p \equiv 0$ или 1 (mod 4), *и эрмитову антисимметрическую, если* $p \equiv 2$ или 3 (mod 4).

113. Сопряженные спиноры. Важно установить, когда два спинора должны быть рассматриваемы как сопряженные. Если эти спиноры простые, необходимо, чтобы они соответствовали двум изотропным комплексно сопряженным ν-плоскостям. Но если ξ — простой спинор, X — вектор изотропной ν-плоскости, которую этот спинор определяет, то имеем соотношение $X\xi = 0$. Пусть ξ' — один из простых спиноров, определяющих сопряженную ν-плоскость, X' — вектор, сопряженный с X; имеем

$$X'\xi' \equiv \bar{X}^*\xi' = 0,$$

откуда на основании формулы (13) (п. 101)

$$C\bar{X}^*\xi' \equiv (-1)^\nu \bar{X} C\xi' = 0;$$

так как $\bar{X}\bar{\xi} = 0$, то естественно положить $C\xi' = m\bar{\xi}$, то есть $\xi' = mC\bar{\xi}$.

Чтобы оправдать эту формулу и уточнить значение m, рассмотрим изотропный ν-вектор, соответствующий ξ; он дается выражением

$$\xi^* C \underset{(\nu)}{X} \xi;$$

заменим в этой формуле ν-вектор $\underset{(\nu)}{X}$ его сопряженным и ξ через ξ'; мы должны получить выражение, комплексно сопряженное первому.

Имеем

$$(-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} m^2 \bar{\xi}^* C^* C \underset{(\nu)}{\bar{X}}{}^* C \bar{\xi} = \overline{\xi^* C \underset{(\nu)}{X} \xi};$$

учитывая, что второй член равен своему транспонированному, и принимая во внимание соотношения (14), (15) (п. **101**), получаем

$$(-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} m^2 \bar{\xi}^* \underset{(\nu)}{\bar{X}}{}^* C \xi = \bar{\xi}^* \underset{(\nu)}{\bar{X}}{}^* C^* \bar{\xi},$$

то есть

$$m^2 = (-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} C^* C^{-1} = (-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2} + \frac{\nu(\nu+1)}{2}} = (-1)^\nu.$$

Таким образом, приходим к следующему соглашению:

Спинор, сопряженный с ξ, есть $i^\nu C \bar{\xi}$.

Отметим, что спинор, сопряженный с сопряженным от ξ, является спинором $C^2 \xi = (-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} \xi$. Переход от спинора к его сопряженному определяет в пространстве спиноров *антиинволюцию*; эта антиинволюция первого рода, если $\nu \equiv 0$ или -1 (mod 4); она — второго рода, если $\nu \equiv 1$ или 2 (mod 4). В первом случае в пространстве спиноров существует область вещественности, образованная спинорами, равными своим сопряженным. При $\nu = 3$ вещественные спиноры—те, для которых $\xi = -iC\bar{\xi}$, что дает уравнения

$$\xi_0 = -i\bar{\xi}_{123}, \quad \xi_1 = i\bar{\xi}_{23}, \quad \xi_2 = i\bar{\xi}_{31}, \quad \xi_3 = i\bar{\xi}_{12}.$$

114. Тензор $\xi_\alpha \bar{\xi}_\beta$. Спинор, сопряженный с данным, при отражении не преобразуется вполне как спинор. В самом деле, при вещественной симметрии A, преобразующей ξ в $A\xi$, сопряженный спинор преобразуется в

$$i^\nu C\overline{A}\overline{\xi} = i^\nu CA^*\overline{\xi} = (-1)^\nu i^\nu AC\overline{\xi} = (-1)^\nu A(i^\nu C\overline{\xi}).$$

Если ν четное, $C\overline{\xi}$ преобразуется вполне как спинор; но при ν нечетном мы имеем преобразование по закону спинора только при вращении, но не при отражении.

Мы получим разложение тензора $\xi_\alpha\overline{\xi}_\beta$, исходя из p-векторов, определяемых разложением тензора $\xi_\alpha\xi'_\beta$, в котором заменяем ξ' на спинор, сопряженный с ξ. Рассмотрим, таким образом, выражение

$$\xi'^* C \underset{(p)}{X} \xi = i^\nu \overline{\xi}^* C^* C \underset{(p)}{X} \xi = i^\nu \overline{\xi}^* \underset{(p)}{X} \xi.$$

При вещественной симметрии A это выражение умножается на $(-1)^{\nu-p}(-1)^\nu$ (второй множитель получается потому, что спинор, сопряженный с ξ, преобразуется как спинор только в том случае, если ν четное). Следовательно, *рассматриваемое выражение дает p-вектор или $(n-p)$-вектор в зависимости от четности или нечетности p.*

Тензор $\xi_\alpha\overline{\xi}_\beta$ разлагается, таким образом, на $\nu+1$ неприводимых тензоров, которые являются $2q$-векторами.

В частности, для $p=0$ имеем скаляр (пренебрегаем постоянным множителем i^ν):

$$\overline{\xi}^*\xi = \sum_\alpha \xi_\alpha\overline{\xi}_\alpha.$$

Важно отметить, что *полученные таким образом $2q$-векторы все вещественны.*

Достаточно показать, что если p-вектор $\underset{(p)}{X}$ вещественный, то выражение $\overline{\xi}^* \underset{(p)}{X} \xi$ вещественно или чисто мнимо, так как тогда составляющие p-вектора или $(n-p)$-вектора будут, с точностью до множителя, вещественными величинами. Но величина, комплексно сопряженная с $\bar{\xi}^* \underset{(p)}{X} \xi$, равна

$$\xi^* \underset{(p)}{X} \bar{\xi} = \bar{\xi}^* \underset{(p)}{X}{}^* \xi = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \bar{\xi}^* \underset{(p)}{X} \xi.$$

Что и требовалось доказать.

Таким образом, чтобы иметь вещественные составляющие мультивектора, определенного двумя сопряженными спинорами, достаточно исходить из выражения

$$i^{\frac{p(p-1)}{2}} \bar{\xi}^* \underset{(p)}{X} \xi.$$

115. Пример $\nu = 2$. При $\nu = 2$ тензор $\xi_\alpha \bar{\xi}_\beta$ разлагается на три неприводимых тензора:

1° скаляр

$$\xi_0 \bar{\xi}_0 + \xi_1 \bar{\xi}_1 + \xi_2 \bar{\xi}_2 + \xi_{12} \bar{\xi}_{12};$$

2° 4-вектор, определяемый формой

$$\begin{aligned} \bar{\xi}^* X \xi &= x^0 \bar{\xi}^* H_0 \xi + x^1 \bar{\xi}^* H_1 \xi + x^2 \bar{\xi}^* H_2 \xi + x^{1'} \bar{\xi}^* H_{1'} \xi + \\ &+ x^{2'} \bar{\xi}^* H_{2'} \xi = x^0 (\xi_0 \bar{\xi}_0 - \xi_1 \bar{\xi}_1 - \xi_2 \bar{\xi}_2 + \xi_{12} \bar{\xi}_{12}) + \\ &+ x^1 (\xi_1 \bar{\xi}_0 - \xi_{12} \bar{\xi}_2) + x^2 (\xi_2 \bar{\xi}_0 + \xi_{12} \bar{\xi}_1) + x^{1'} (\xi_0 \bar{\xi}_1 - \xi_2 \bar{\xi}_{12}) + \\ &+ x^{2'} (\xi_0 \bar{\xi}_2 + \xi_1 \bar{\xi}_{12}); \end{aligned}$$

его контравариантные составляющие суть

$$\left.\begin{aligned} x^{11'22'} &= \xi_0 \bar{\xi}_0 - \xi_1 \bar{\xi}_1 - \xi_2 \bar{\xi}_2 + \xi_{12} \bar{\xi}_{12}, \\ x^{01'22'} &= -\bar{\xi}_1 \xi_0 + \xi_{12} \bar{\xi}_2, \\ x^{0122'} &= \xi_0 \bar{\xi}_1 - \xi_2 \bar{\xi}_{12}, \\ x^{011'2'} &= -\xi_2 \bar{\xi}_0 - \xi_{12} \bar{\xi}_1, \\ x^{011'2} &= \xi_0 \bar{\xi}_2 + \xi_1 \bar{\xi}_{12}. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

3° Бивектор, определяемый формой $i\bar{\xi}^* \underset{(2)}{X} \xi$; его 10 ковариантных составляющих определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned}
x_{01} &= i\bar{\xi}^* H_0 H_1 \xi = i(\xi_1\bar{\xi}_0 + \xi_{12}\bar{\xi}_2),\\
x_{01'} &= i\bar{\xi}^* H_0 H_{1'} \xi = -i(\xi_0\bar{\xi}_1 + \xi_2\bar{\xi}_{12}),\\
x_{02} &= i\bar{\xi}^* H_0 H_2 \xi = i(\xi_2\bar{\xi}_0 - \xi_{12}\bar{\xi}_1),\\
x_{02'} &= i\bar{\xi}^* H_0 H_{2'} \xi = -i(\xi_0\bar{\xi}_2 - \xi_1\bar{\xi}_{12}),\\
x_{12} &= i\bar{\xi}^* H_1 H_2 \xi = i\xi_{12}\bar{\xi}_0,\\
x_{1'2'} &= i\bar{\xi}^* H_{1'} H_{2'} \xi = -i\xi_0\bar{\xi}_{12},\\
x_{12'} &= i\bar{\xi}^* H_1 H_{2'} \xi = -i\xi_1\bar{\xi}_2,\\
x_{1'2} &= i\bar{\xi}^* H_{1'} H_2 \xi = i\xi_2\bar{\xi}_1,\\
x_{11'} &= \frac{1}{2} i\bar{\xi}^*(H_1 H_{1'} - H_{1'} H_1)\xi =\\
&= \frac{i}{2}(\xi_0\bar{\xi}_0 - \xi_1\bar{\xi}_1 + \xi_2\bar{\xi}_2 - \xi_{12}\bar{\xi}_{12}),\\
x_{22'} &= \frac{1}{2} i\bar{\xi}^*(H_2 H_{2'} - H_{2'} H_2)\xi =\\
&= \frac{i}{2}(\xi_0\bar{\xi}_0 + \xi_1\bar{\xi}_1 - \xi_2\bar{\xi}_2 - \xi_{12}\bar{\xi}_{12}).
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Мера 4-вектора и бивектора с точностью до множителя равна

$$\xi_0\bar{\xi}_0 + \xi_1\bar{\xi}_1 + \xi_2\bar{\xi}_2 + \xi_{12}\bar{\xi}_{12}.$$

VI. Случай псевдоэвклидовых пространств

116. Матрицы I и J. Мы можем предполагать, что фундаментальная форма приводится к сумме $n-h$ положительных квадратов и h отрицательных, причем $h \leqslant \nu$. Можно сохранить введенное выше выражение для фундаментальной формы, предполагая, что координаты

$$x^0;\ x^{\nu-h+1}, \ldots, x^{\nu};\ x^{(\nu-h+1)'}, \ldots, x^{\nu'}$$

вещественны, а x^i и $x^{i'}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu - h)$ комплексно сопряженны. Вектор

$$X = x^0H_0 + x^1H_1 + \ldots + x^\nu H_\nu + x^{1'}H_{1'} + \ldots + x^{\nu'}H_{\nu'}$$

имеет себе сопряженным следующий:

$$Y = \bar{x}^0H_0 + \sum_{i=1}^{\nu-h}(\bar{x}^iH_{i'} + \bar{x}^{i'}H_i) + \sum_{j=\nu-h+1}^{\nu}(\bar{x}^jH_j + \bar{x}^{j'}H_{j'}).$$

Чтобы перейти от X к Y, введем две матрицы

$$I = (H_1 - H_{1'})\ldots(H_{\nu-h} - H_{(\nu-h)'}), \tag{19}$$

$$J = (H_{\nu-h+1} - H_{(\nu-h+1)'})\ldots(H_\nu - H_{\nu'}), \tag{20}$$

аналогичные C. Имеем

$$IJ = C, \quad II^* = JJ^* = 1, \tag{21}$$

$$I^2 = (-1)^{\frac{(\nu-h)(\nu-h+1)}{2}}, \quad J^2 = (-1)^{\frac{h(h+1)}{2}}.$$

Простое вычисление, аналогичное тому, которое было проведено для матрицы C, приводит к следующей теореме:

Т е о р е м а. *Вектор Y, сопряженный с вектором X, определяется формулой*

$$Y = (-1)^{\nu-h}I\bar{X}I^{-1} = (-1)^{\nu-h}I\bar{X}I^* = (-1)^{\nu-h}I^*\bar{X}I.$$

Вообще p-вектор $\underset{(p)}{Y}$, сопряженный p-вектору $\underset{(p)}{X}$, равен

$$\underset{(p)}{Y} = (-1)^{p(\nu-h)}I\underset{(p)}{\bar{X}}I^*.$$

В случае $h=0$ мы получим результаты, найденные выше; следует заметить, что тогда $I=C$.

Вектор X вещественный, то есть матрица X соответствует вещественному вектору, если

$$\bar{X} = (-1)^{\nu-h}I^*XI = (-1)^{\nu-h}IXI^*.$$

117. Сопряженные спиноры. Соображения, аналогичные приведенным выше, приводят к следующему определению спинора, сопряженного с данным ξ:

$$\xi' = i^{\nu-h}I\bar{\xi}.$$

Проверим, что, если в выражении

$$\xi^* C \underset{(\nu)}{X} \xi$$

мы заменим ν-вектор $\underset{(\nu)}{X}$ его сопряженным и спинор ξ его сопряженным, мы получим величину, комплексно сопряженную с данной. Следует, таким образом, заменить

$$\underset{(\nu)}{X} \text{ через } (-1)^{\nu(1-h)} I \overline{\underset{(\nu)}{X}} I^* \text{ и } \xi \text{ через } i^{\nu-h} I \overline{\xi};$$

рассматриваемое нами выражение преобразуется в следующее:

$$(-1)^{(\nu-1)h} \overline{\xi}^* I^* C I \overline{X} I^* I \overline{\xi} = (-1)^{(\nu-1)h} \overline{\xi}^* J I \overline{\underset{(\nu)}{X}} \overline{\xi} = \overline{\xi}^* C \overline{\underset{(\nu)}{X}} \overline{\xi},$$

которое является комплексно сопряженным с исходным.

Переход от спинора к его сопряженному определяет в пространстве спиноров антиинволюцию первого рода, если $I^2 = 1$, то есть если $\nu - h \equiv 0$ или $-1 \pmod 4$, или второго рода, если $\nu - h \equiv 1$ или $2 \pmod 4$. В первом случае в пространстве спиноров существует область вещественности, к которой принадлежат спиноры, равные своим сопряженным.

Спинор, сопряженный с данным, преобразуется как спинор при отражении в том случае, если h той же четности, что и ν.

118. Произведение двух сопряженных спиноров. Произведение $\xi_\alpha \overline{\xi}_\beta$ двух сопряженных спиноров является тензором, который можно разложить на неприводимые тензоры, заменяя в тензорах $\mathfrak{T}_p$ спинор ξ' спинором, сопряженным с ξ. Мы должны, таким образом, рассмотреть выражения:

$$\overline{\xi}^* I^* C \underset{(p)}{X} \xi = \overline{\xi}^* J \underset{(p)}{X} \xi.$$

Прежде чем исследовать природу этих тензоров, важно отметить, относительно какой группы мы их будем рассматривать.

Напомним (п. 12), что группа линейных подстановок, оставляющая инвариантной фундаментальную форму, делится на четыре связных семейства:

1° *Собственные вращения*, являющиеся произведениями четного числа пространственных симметрий и четного числа временных.

2° *Несобственные вращения* — произведения нечетного числа пространственных симметрий и нечетного числа временных.

3° *Собственные отражения* — произведения нечетного числа пространственных симметрий и четного числа временных.

4° *Несобственные отражения* — произведения четного числа пространственных симметрий и нечетного числа временных.

Пространственная симметрия соответствует вещественному единичному пространственному вектору A $(A^2 = 1)$; она преобразует вектор X в $-AXA$ и спинор ξ в спинор $A\xi$. Временная симметрия соответствует временному вещественному единичному вектору A $(A^2 = -1)$; она преобразует вектор X в $AXA = -AXA^{-1}$, спинор ξ — в спинор $iA\xi$. Группа собственных вращений и отражений характеризуется тем свойством, что она оставляет инвариантной ориентацию времени (h измерений).

При применении пространственной симметрии A выражение $\bar{\xi}^*\underset{(p)}{JX}\xi$ умножается на $(-1)^{p-h}$; при применении симметрии временной оно умножается на $(-1)^{p-h+1}$.

Отсюда следует, что *относительно группы вращений и отражений, собственных и несобственных, неприводимые тензоры, на которые разлагается тензор $\xi_\alpha\xi_\beta$, не являются мультивекторами.*

Если же ограничиться рассмотрением группы собственных вращений и отражений, оставляющих инвариантной временную ориентацию, то эти тензоры эквивалентны мультивекторам. Выражение $\bar{\xi}^*\underset{(p)}{JX}\xi$ не изменяется при собственном вращении и умножается на $(-1)^{p-h}$ при собственном отражении. Следовательно, оно определяет p-вектор или $(n-p)$-вектор в зависимости от того, имеют ли p и h одинаковую четность или неодинаковую.

Как и в случае положительно определенной фундаментальной формы, доказывается, что q-векторы, построенные при помощи двух сопряженных спиноров, вещественны.

119. h-векторы, построенные на двух сопряженных спинорах. Особенно интересный случай получается при $p = h$;

выражение

$$\bar{\xi}^* \underset{(h)}{JX} \xi$$

определяет h-вектор. *Временна́я составляющая* этого h-вектора получается при замене в этом выражении $\underset{(h)}{X}$ на h-вектор, образованный h временны́ми векторами базиса, именно

$$H_{\nu-h+1} - H_{(\nu-h+1)'}, \ldots, \quad H_{\nu} - H_{\nu'};$$

эта временна́я составляющая, таким образом, равна

$$\bar{\xi}^* J^2 \xi = (-1)^{\frac{h(h+1)}{2}} \bar{\xi}^* \xi;$$

она с точностью до знака равна сумме квадратов модулей 2^{ν} составляющих спинора [1]).

Отсюда можно вывести одно важное свойство, которое применяется в квантовой механике. *Если h-вектор, определяемый двумя сопряженными спинорами, простой, то h-плоскость, содержащая его, не имеет ни одного пространственного вектора.* В самом деле, предположим, что она содержит такой вектор; при помощи вращения можно этот пространственный вектор привести в такое положение, что все его временны́е составляющие будут равны нулю. Пусть ξ' — спинор, получающийся из ξ при этом вращении; h-вектор, получающийся из данного h-вектора при таком же вращении, имеет временну́ю составляющую, равную нулю, так как временны́е составляющие одного из векторов, на которые его можно разложить, равны нулю; но этого не может быть, так как эта временна́я составляющая должна быть равна сумме квадратов модулей составляющих спинора ξ'.

Этот вывод имеет смысл, конечно, только в том случае, если h-вектор простой. Интересно сделать подсчет для $\nu = h = 2$. Для составляющих бивектора, определенного двумя сопряженными спинорами, получаем, принимая во внимание, что $J = C$,

1) R. Brauer, H. Weyl, *Spinors in n dimensions* (Amer. J. of Math., 57, 1935, стр. 447).

$$\left.\begin{aligned}
x_{01} &= \bar{\xi}^* C H_0 H_1 \xi = -(\xi_1 \bar{\xi}_{12} + \xi_{12} \bar{\xi}_1),\\
x_{01'} &= \bar{\xi}^* C H_0 H_{1'} \xi = -(\xi_0 \bar{\xi}_2 + \xi_2 \xi_0),\\
x_{02} &= \bar{\xi}^* C H_0 H_2 \xi = -(\bar{\xi}_2 \xi_{12} + \xi_{12} \bar{\xi}_2),\\
x_{02'} &= \bar{\xi}^* C H_0 H_{2'} \xi = \bar{\xi}_0 \xi_1 + \xi_1 \bar{\xi}_0,\\
x_{12} &= \xi^* C H_1 H_2 \xi = -\xi_{12} \bar{\xi}_{12},\\
x_{1'2'} &= \bar{\xi}^* C H_{1'} H_{2'} \xi = -\bar{\xi}_0 \xi_0,\\
x_{12'} &= \bar{\xi}^* C H_1 H_{2'} \xi = \xi_1 \xi_1,\\
x_{1'2} &= \bar{\xi}^* C H_{1'} H_2 \xi = \xi_2 \bar{\xi}_2,\\
x_{11'} &= \frac{1}{2} \bar{\xi}^* C (H_1 H_{1'} - H_{1'} H_1) \xi =\\
&= -\frac{1}{2} (\xi_0 \bar{\xi}_{12} + \xi_1 \bar{\xi}_2 + \xi_2 \bar{\xi}_1 + \xi_{12} \bar{\xi}_0),\\
x_{22'} &= \frac{1}{2} \bar{\xi}^* C (H_2 H_{2'} - H_{2'} H_2) \xi =\\
&= -\frac{1}{2} (\xi_0 \bar{\xi}_{12} - \xi_1 \bar{\xi}_2 - \xi_2 \bar{\xi}_1 + \xi_{12} \bar{\xi}_0).
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Вычисление показывает, что этот вектор простой, когда скаляр $\bar{\xi}^* C \xi$ равен нулю, то есть (п. 111) когда изотропные сопряженные 2-плоскости $[\xi]$ и $[\bar{\xi}]$ имеют общую прямую. То же имеем в частном случае, когда эти 2-плоскости совпадают, что характеризуется (п. 111) тем, что тензор $\mathfrak{T}_1$, получающийся из величины $\bar{\xi}^* C X \xi$, равен нулю; в этом случае бивектор (22) является изотропным бивектором, соответствующим простому спинору ξ.

ГЛАВА VI

СПИНОРЫ ПРОСТРАНСТВА $E_{2\nu}$

I. Изотропные ν-плоскости и полуспиноры

120. Изотропные ν-плоскости. Мы переходим от пространства $E_{2\nu+1}$ к пространству $E_{2\nu}$, полагая в первом $x^0=0$. Получаем фундаментальную форму

$$F \equiv x^1 x^{1'} + x^2 x^{2'} + \ldots + x^\nu x^{\nu'}.$$

В пространстве $E_{2\nu}$ изотропные плоскости имеют не больше ν измерений; в самом деле, плоскость, перпендикулярная к изотропной p-плоскости, имеет $n-p$ измерений, и так как она содержит эту p-плоскость, то $n-p \geqslant p$, то есть $p \leqslant \nu$. С другой стороны, каждая изотропная ν-плоскость пространства $E_{2\nu}$ может быть рассматриваема в пространстве $E_{2\nu+1}$, гиперплоскостью которого является $E_{2\nu}$, как ν-плоскость, перпендикулярная к вектору H_0. Составляющие простого спинора ξ, соответствующего этой ν-плоскости в пространстве $E_{2\nu+1}$, должны, таким образом, удовлетворять соотношению вида

$$H_0\xi = m\xi \qquad (m \text{ — скаляр}),$$

откуда умножением на H_0 получаем

$$\xi = m^2\xi, \quad m^2 = 1.$$

Если $m=1$, то отсюда вытекает, что все ξ_α с нечетным числом индексов равны нулю; если $m=-1$, то все ξ_α с четным числом индексов равны нулю. Обратно, если простой спинор пространства обладает тем свойством, что все составляющие с четным (нечетным) числом индексов равны нулю, то соответствующая ν-плоскость лежит в пространстве $E_{2\nu}$, так как имеем $H_0\xi = -\xi$ ($H_0\xi = \xi$), что показывает инвариантность ν-плоскости при семметрии H_0.

121. Полуспиноры. Назовем *полуспинорами* пространства $E_{2\nu}$ систему 2^ν чисел ξ_α, в которой все составляющие с четным (нечетным) числом индексов равны нулю. Существует два рода полуспиноров: полуспиноры первого рода (которые мы будем обозначать через φ) с четным числом индексов и полуспиноры второго рода (которые мы будем обозначать через ψ) с нечетным числом индексов. При применении симметрии в пространстве $E_{2\nu}^{\omega}$ эти два рода полуспиноров переходят один в другой; это вытекает из того, что операции H_l и $H_{l'}$ над спинором пространства $E_{2\nu+1}$ переводят каждую составляющую ξ_α с четным числом индексов в составляющую с нечетным и обратно. Таким образом, вращение преобразует полуспиноры каждого рода между собой. В частности, *два семейства изотропных ν-плоскостей пространства $E_{2\nu}$ преобразуются одно в другое при отражении и каждое в самое себя при вращении.*

122. Простые полуспиноры, определяемые как изотропные поляризованные ν-векторы. Возвращаясь снова к пространству $E_{2\nu+1}$, мы видим, что простой полуспинор, например φ, можно рассматривать как изотропный поляризованный ν-вектор этого пространства, определяемый величиной

$$\varphi^* C \underset{(\nu)}{X} \varphi,$$

где $\underset{(\nu)}{X}$ — произвольный ν-вектор пространства $E_{2\nu+1}$.

Нетрудно доказать вообще, что каждый p-вектор пространства $E_{2\nu+1}$ может быть представлен в виде $\underset{(p)}{X} + \underset{(p-1)}{X} H_0$, где $\underset{(p)}{X}$ — p вектор, $\underset{(p-1)}{X}$ — $(p-1)$-вектор пространства $E_{2\nu}$. Таким образом, сли учесть, что $H_0\varphi = \varphi$, то величина $\varphi^* C \underset{(\nu)}{X} \varphi$ может быть заменена следующей:

$$\varphi^* C \underset{(\nu)}{X} \varphi + \varphi^* C \underset{(\nu-1)}{X} H_0 \varphi = \varphi^* C \underset{(\nu)}{X} \varphi + \varphi^* C \underset{(\nu-1)}{X} \varphi,$$

где $\underset{(\nu)}{X}$ и $\underset{(\nu-1)}{X}$ принадлежат к $E_{2\nu}$. Но, как мы видели (п. 107), второй член правой части тождественно равен нулю. Величина $\varphi^* C \underset{(\nu)}{X} \varphi$, где $\underset{(\nu)}{X}$ — произвольный ν-вектор пространства $E_{2\nu}$, определяет, таким образом, в $E_{2\nu}$ изотропный ν-вектор, составляющие которого являются квадратичными формами составляющих простого полуспинора φ, который, обратно, может рассматриваться как поляризованный изотропный ν-вектор.

123. Условия простоты полуспинора. Полуспинор тогда и только тогда является простым, если он обращает в нуль все тензоры $\varphi^* C \underset{(p)}{X} \varphi$ при $p < \nu$ (п. 107) (некоторые из этих тензоров тождественно равны нулю). В этом выражении $\underset{(p)}{X}$ обозначает произвольный p-вектор пространства $E_{2\nu+1}$, но сделанное выше замечание показывает, что можно ограничиться p-векторами пространства $E_{2\nu}$. Мы знаем (п. **104**), что рассматриваемая величина тождественно равна нулю, если $\nu - p \equiv 1$ или $2 \pmod 4$. С другой стороны, она также тождественно равна нулю, если $\nu - p$ нечетно: в самом деле, матрица $C \underset{(p)}{X}$ является суммой произведений $\nu + p$ матриц H_i и $H_{i'}$; каждая матрица H_i, примениая к спинору, меняет четность числа индексов у каждой его составляющей; таким образом, если $\nu + p$ (или $\nu - p$) нечетно, то матрица $C \underset{(p)}{X}$, изменяя четность числа индексов полуспинора φ, превратит его тождественно в нуль. Остается, следовательно, рассматривать значения p, меньшие ν и отличающиеся от ν на числа, кратные 4.

Теорема. *Полуспинор тогда и только тогда является простым, если его составляющие обращают тождественно в нуль все величины $\xi^* C \underset{(p)}{X} \xi$, где $\underset{(p)}{X}$ обозначает произвольный p-вектор пространства $E_{2\nu}$, причем p принимает все значения, меньшие ν и сравнимые с $\nu \pmod 4$.*

В пространстве $2^{\nu-1}$ измерений полуспиноров данного вида простые полуспиноры образуют, таким образом, многообразие, определяемое системой квадратичных уравнений. Простой подсчет показывает, что число этих линейно независимых уравнений равно

$$C_{2\nu}^{\nu-4} + C_{2\nu}^{\nu-8} + \ldots = 2^{\nu-2}(2^{\nu-1} + 1) - \frac{1}{2} C_{2\nu}^{\nu};$$

это число равно нулю при $\nu=1, 2, 3$; для $\nu=4, 5, 6, 7$ оно соответственно равно 1, 10, 66, 364[1].

При $\nu=4$ имеем соотношение

$$\xi_0\xi_{1234}-\xi_{12}\xi_{34}-\xi_{23}\xi_{14}-\xi_{31}\xi_{24}=0 \text{ (полуспиноры первого рода)}, \quad (1)$$

$$\xi_1\xi_{234}-\xi_2\xi_{134}+\xi_3\xi_{124}-\xi_4\xi_{123}=0 \text{ (полуспиноры второго рода)}. \quad (2)$$

124. Пересечение двух изотропных ν-плоскостей. Рассуждения п. 110 показывают, что в пространстве $E_{2\nu}$ две изотропные ν-плоскости $[\xi]$ и $[\xi']$ могут быть при помощи вращения или отражения приведены в положение ν-плоскостей, соответствующих спинору ξ', все составляющие которого, за исключением ξ_0, равны нулю, и спинору ξ, имеющему единственную ненулевую составляющую $\xi_{(p+1)(p+2)\ldots\nu}$; эти две ν-плоскости имеют тогда пересечение p измерений. Отметим, что полуспинор ξ' первого рода и что полуспинор ξ также первого рода в том случае, если $\nu-p$ четно, и второго рода, если $\nu-p$ нечетно. Таким образом, имеем теорему:

Теорема. *Пересечение двух изотропных ν-плоскостей является p-плоскостью, число измерений которой той же четности, что и ν, если обе ν-плоскости одного рода, и разной четности, если обе ν-плоскости различного рода.*

Две изотропные ν-плоскости одного рода $[\varphi]$ и $[\varphi']$ имеют тогда и только тогда пересечение p измерений, причем p одинаковой четности с ν, если величины $\varphi^*C\underset{(q)}{X}\varphi'$ $(q=p-2, p-4, \ldots)$ равны нулю, но величина $\varphi^*C\underset{(p)}{X}\varphi'$ не равна нулю; p-вектор, определяемый последней величиной, изотропный и лежит в p-плоскости, являющейся пересечением данных двух ν-плоскостей.

Две изотропные ν-плоскости разного рода $[\varphi]$ и $[\psi]$ тогда и только тогда имеют пересечение p измерений, причем p и ν разной четности, если величины $\varphi^*C\underset{(q)}{X}\psi$ $(q=p-2,$

---

[1] Нетрудно проверить, что это число равно числу линейно независимых квадратичных уравнений, которые определяют простые спиноры пространства $E_{2\nu-1}$; эти спиноры имеют также $2^{\nu-1}$ составляющих (п. 108).

$p-4$ ...) равны нулю, но величина $\varphi^* \underset{(p)}{CX} \psi$ отлична от нуля; p-вектор, определяемый последней величиной, изотропный и лежит в p-плоскости, являющейся пересечением двух данных ν-плоскостей.

Все эти результаты являются непосредственным следствием теоремы п. 111. Как и в пространстве $E_{2\nu+1}$, тождественное обращение в нуль величины $\varphi^* \underset{(p)}{CX} \varphi$ (p одинаковой четности с ν) или $\varphi^* \underset{(p)}{CX} \psi$ (p и ν разной четности) влечет за собой тождественное обращение в нуль аналогичных величин, у которых p заменено на $p-2$, $p-4$ ...

Например, при $\nu=3$ две изотропные различные 3-плоскости одного рода имеют общую прямую; две изотропные 3-плоскости разного рода или не имеют ни одной общей прямой, или же имеют общую 2-плоскость: последний случай имеет место, если

$$\xi_0 \xi_{123} - \xi_1 \xi_{23} - \xi_2 \xi_{31} - \xi_3 \xi_{12} = 0,$$

где ξ_0, ξ_{23}, ξ_{31}, ξ_{12} — составляющие полуспинора, соответствующего первой 3-плоскости, ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_{123} — составляющие полуспинора, соответствующего второй 3-плоскости.

При $\nu=4$ две изотропные 4-плоскости различного рода имеют общую прямую или 3-плоскость; последний случай имеет место, если величина $\varphi^* CX \psi$ тождественно равна нулю, что дает восемь условий, из которых достаточно выписать два следующих:

$$\xi_{1234} \xi_1 - \xi_{12} \xi_{134} + \xi_{13} \xi_{124} - \xi_{14} \xi_{123} = 0,$$
$$\xi_0 \xi_{234} - \xi_{23} \xi_4 + \xi_{24} \xi_3 - \xi_{34} \xi_2 = 0;$$

составляющие ξ с четным числом индексов и составляющие ξ с нечетным числом индексов являются соответственно составляющими полуспиноров, соответствующих двум данным изотропным 4-плоскостям. Составляющие каждого из этих полуспиноров удовлетворяют, конечно, соотношению, характеризующему простые полуспиноры, именно, соотношению (1) для первого полуспинора и соотношению (2) — для второго (п. 123).

II. Матрицы, соответствующие p-векторам. Представление вращений и отражений

125. Структура матриц $\underset{(p)}{X}$. Матрица $\underset{(p)}{X}$, соответствующая p-вектору пространства $E_{2\nu}$, имеет своеобразную структуру. Расположим строки и колонны этой матрицы следующим образом: сначала выпишем те, составные индексы которых содержат четное число простых индексов, затем с составными индексами, содержащими нечетное число простых. Так как x^0 заменено здесь нулем, то единственные не равные нулю элементы матрицы X, соответствующей некоторому вектору, — те, для которых составной порядковый номер строки имеет на один индекс больше или меньше составного порядкового номера колонны. Эта матрица X принадлежит, таким образом, к типу

$$X=\begin{pmatrix} 0 & \Xi \\ \mathrm{H} & 0 \end{pmatrix},$$

где каждая из четырех матриц 0, Ξ, H, 0 имеет порядок, равный $2^{\nu-1}$. Матрица, соответствующая p-вектору, являясь суммой произведений p матриц, соответствующих векторам, имеет, таким образом, одну из следующих форм[1]):

$$\underset{(p)}{X}=\begin{pmatrix} \underset{(p)}{\Xi} & 0 \\ 0 & \underset{(p)}{\mathrm{H}} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \underset{(p)}{X}=\begin{pmatrix} \underset{(p)}{\Xi} & 0 \\ 0 & \underset{(p)}{\mathrm{H}} \end{pmatrix}$$

в зависимости от того, четным или нечетным является p. В частности, матрица C, являющаяся произведением ν матриц, соответствующих векторам, имеет диагональные матрицы порядка $2^{\nu-1}$, заполненные нулями, если ν нечетно; противоположное имеет место при четном ν.

126. Применение симметрии к спинору. Пусть A — единичный вектор пространства $E_{2\nu}$. Мы знаем на основании предыдущей главы, что результат применения симметрии, соответ-

[1]) Матрицы $\underset{(p)}{\mathrm{H}}$, которые всегда связаны с матрицами Ξ, не должны отождествляться с матрицами H_i и $H_{i'}$ векторов базиса пространства; первые — порядка $2^{\nu-1}$, последние — порядка 2^{ν}.

ствующей вектору A, к простому полуспинору φ определяется соотношениями:

$$\varphi' = A\varphi \quad \text{или} \quad \varphi' = -A\varphi;$$

совершенно так же дело обстоит для простого полуспинора ψ. Возможны два соглашения, причем они оба совместимы с предыдущими условиями:

1° можно отнести каждой симметрии $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$, преобразующей спинор $\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$, две операции

$$\varphi' = \alpha\psi, \qquad \psi' = \beta\varphi, \qquad \text{то есть} \qquad \xi' = A\xi,$$
$$\varphi' = -\alpha\psi, \quad \psi' = -\beta\varphi, \quad \text{то есть} \quad \xi' = -A\xi;$$

2° можно, наоборот, ей отнести две операции

$$\varphi' = \alpha\psi, \quad \psi' = -\beta\varphi, \quad \text{то есть} \quad \xi' = AK\xi,$$
$$\varphi' = -\alpha\psi, \quad \psi' = \beta\varphi, \quad \text{то есть} \quad \xi' = -AK\xi,$$

где

$$K = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}.$$

Оба соглашения одинаково законны; первое — наиболее естественное; *оно имеет то преимущество, что дает одинаковые соглашения в пространстве $E_{2\nu+1}$ и в пространстве $E_{2\nu}$, содержащемся в первом.* В некоторых отношениях второе соглашение вводит некоторые упрощения.

127. Две группы вращений и отражений в применении к спинорам. Какое бы из соглашений мы ни сделали, мы имеем в общем одни и те же матрицы, представляющие вращения в применении к спинорам, именно

$$\xi' = S\xi,$$

где S является произведением четного числа $\leqslant 2\nu$ единичных векторов.

Первое соглашение для отражений дает преобразования

$$\xi' = SA\xi$$

где A — единичный вектор, фиксированный для всех случаев;

второе соглашение *для того же самого отражения* дает преобразование

$$\xi' = SAK\xi.$$

Нетрудно видеть, что обе смешанные группы (вращений и отражений), определенные таким образом, различны и не имеют одинаковой структуры; произведение двух отражений SA и SA' не равно произведению отражений SAK и $SA'K$: например,

$$AKA'K = -AA', \text{ но не } AA'.$$

Вполне очевидно, что *в применении к векторам* обе эти группы тождественны.

Для дальнейшего изложения мы примем первое соглашение, более естественное. Отметим только то свойство матрицы K, что она антикоммутативна с каждым вектором.

128. Неприводимость спинора и полуспиноров. Рассуждения п. 100 показывают, что спинор неприводим относительно группы вращений и отражений (как бы мы ее ни определяли) и разлагается относительно группы вращений на две неприводимые части, которые являются полуспинорами двух родов.

129. Матрицы порядка 2^ν, разложенные на суммы p-векторов. Элементы матрицы $\underset{(p)}{X}$, соответствующей p-вектору, являются линейными комбинациями C_n^p составляющих этого p-вектора; ясно, что они не равны все тождественно нулю. Отсюда следует, что среди них имеется C_n^p независимых, так как p-вектор неприводим относительно группы вращений и отражений, а элементы матрицы $\underset{(p)}{X}$ преобразуются линейно между собой каждым элементом этой группы. Следовательно, *матрицы, соответствующие двум различным p-векторам, различны*. Как и в п. 98, мы докажем, что из матрицы порядка 2^ν можно выделить скаляр, вектор, ..., n-вектор, то есть тензоры неприводимые и *неэквивалентные* между собой относительно группы вращений и отражений. Так как ни один из этих неприводимых тензоров не равен тождественно нулю и сумма их порядков равна

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n = 2^{2\nu},$$

то есть числу элементов рассматриваемой матрицы, то имеем теорему:

Теорема. *Каждая матрица порядка 2^ν может быть представлена одним и только одним способом в виде суммы скаляра, вектора, бивектора, ..., n-вектора в пространстве 2ν измерений.*

Мы получаем, таким образом, в другой интерпретации, систему гиперкомплексных чисел Клифорда-Липшитца.

Интересно отметить структуру матрицы, соответствующей n-вектору пространства $E_{2\nu}$; она тождественна с матрицей, соответствующей в пространстве $E_{2\nu+1}$ вектору, перпендикулярному пространству $E_{2\nu}$ то есть имеет вид $\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$. В частности, симметрия относительно начала определяется матрицей $\begin{pmatrix} i^\nu & 0 \\ 0 & -i^\nu \end{pmatrix}$ и матрицей $\begin{pmatrix} -i^\nu & 0 \\ 0 & i^\nu \end{pmatrix}$.

130. Структура матриц $\underset{(\nu)}{X}$. При *вращении* элементы каждой из матриц $\underset{(p)}{\Xi}$, $\underset{(p)}{H}$, входящих в состав матрицы $\underset{(\nu)}{X}$ (п. 125), преобразуются линейной подстановкой. Если $p \neq \nu$, то p-вектор неприводим относительно группы вращений; следовательно, элементы каждой из матриц $\underset{(p)}{\Xi}$, $\underset{(p)}{H}$ являются линейно независимыми комбинациями от C_n^p составляющих p-вектора, соответствующего матрице $\underset{(p)}{X}$.

Это рассуждение неприменимо, если $p = \nu$; так как ν-вектор разлагается относительно группы вращений на два неприводимых неэквивалентных тензора, являющихся полу-ν-векторами (п. 49), то элементы одной из матриц $\underset{(\nu)}{\Xi}$ выражаются или независимыми линейными комбинациями от $C_{2\nu}^\nu$ составляющих ν-вектора, или же линейными комбинациями от $\frac{1}{2}C_{2\nu}^\nu$ составляющих одного из полу-ν-векторов, на которые разлагается данный ν-вектор. Чтобы доказать, что имеет место последнее, достаточно доказать существование ν-вектора, для которого матрица $\underset{(\nu)}{H}$ тождественно равна нулю, и ν-вектора, для которого матрица $\underset{(\nu)}{\Xi}$

тождественно равна нулю. ν-вектор $H_1H_2\ldots H_\nu$, например, определяется матрицей, которая при применении к спинору обращает в нуль все составляющие кроме ξ_0, преобразуемой в $\xi_{12\ldots\nu}$; следовательно, матрица имеет только одну строку, по номеру нулевую, не состоящую исключительно из нулей, то есть $\underset{(\nu)}{H}$ тождественно равна нулю; рассматриваемый ν-вектор, являющийся изотропным, разлагается, таким образом, на два полу-ν-вектора, из которых один тождественно равен нулю. Точно так же матрица $H_1H_2\ldots H_{\nu-1}H_\nu$, обращает в нуль все составляющие ξ_α спинора, за исключением ξ_ν, которая преобразуется в $(-1)^{\nu-1}\xi_{12\ldots(\nu-1)}$; единственная строка этой матрицы, не состоящая исключительно из нулей, имеет номер ν, так что составляющая $\underset{(\nu)}{\Xi}$ этой матрицы тождественно равна нулю.

Так как каждый изотропный ν-вектор при помощи вращения можно превратить в один из рассмотренных ν-векторов, умноженный на некоторое число, то матрицы, соответствующие изотропным ν-векторам первого рода, имеют составляющую $\underset{(\nu)}{H}$, тождественно равную нулю, а у матриц, соответствующих изотропным ν-векторам второго рода, составляющая $\underset{(\nu)}{\Xi}$ тождественно равна нулю; эти ν-векторы, таким образом, в действительности являются полу-ν-векторами частного вида.

Итак, *каждому p-вектору ($p \neq \nu$) можно отнести двумя различными способами матрицу порядка* $2^{\nu-1}$ ($\underset{(\nu)}{\Xi}$ и $\underset{(\nu)}{H}$), *каждому полу-ν-вектору можно отнести вполне определенную матрицу порядка* $2^{\nu-1}$ ($\underset{(\nu)}{\Xi}$ *для полу-ν-векторов первого рода*, $\underset{(\nu)}{H}$ — *для полу-ν-векторов второго рода*).

III. Разложение произведения двух спиноров

131. Разложение относительно группы вращений и отражений. Произведение $\xi_\alpha\xi'_\beta$ двух спиноров может быть разложено при помощи рассмотрения $n+1$ величин

$$\xi^* C \underset{(p)}{X} \xi' \quad (p = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

При применении симметрии, соответствующей единичному вектору A, эта величина умножается на $(-1)^{\nu-p}$; таким образом, она определяет, как и в $E_{2\nu+1}$, p-вектор или $(n-p)$-вектор, смотря по тому, четным или нечетным является $\nu - p$.

Отсюда вытекает

Теорема. *Произведение двух спиноров вполне приводимо относительно группы вращений и отражений и разлагается на скаляр, вектор, бивектор, ..., n-вектор.*

Доказательство основывается на том, что полное число $2^{2\nu}$ произведений $\xi_\alpha \xi'_\beta$ равно сумме порядков найденных неприводимых и неэквивалентных тензоров.

Относительно полученных p-векторов можно доказать, как в п. 104, что они симметричны относительно спиноров ξ и ξ', если $\nu - p \equiv 0$ или 3 (mod 4), и антисимметричны, если $\nu - p \equiv 1$ или 2 (mod 4). Симметричные неприводимые тензоры дают разложение тензора $\xi_\alpha \xi_\beta$, если отождествить спиноры ξ и ξ'. При $\nu = 2$ получаем вектор и бивектор, при $\nu = 3$ имеем 6-вектор, тривектор и бивектор.

132. Разложение произведения двух полуспиноров относительно группы вращений. 1° Рассмотрим сначала произведение полуспиноров одного рода, например, φ и φ'. Величина $\varphi^* \underset{(p)}{C X} \varphi'$, где φ есть матрица $\begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ с 2^ν строками и одним столбцом, отлична от нуля только в том случае, если $\nu + p$ четно. Придавая, таким образом, p значения одинаковой четности с ν и отличные от ν, мы получаем тензоры, неприводимые относительно группы вращений; мы рассмотрим только $(\nu - 2q)$-векторы. Придавая затем p значение ν, мы получим полу-ν-вектор первого или второго рода: если ν четно, то действует матрица $\underset{(\nu)}{\Xi}$, если нечетно, — матрица $\underset{(\nu)}{H}$.

Полное число составляющих неприводимых неэквивалентных тензоров, выделенных таким образом из тензора $\varphi_\alpha \varphi'_\beta$, равно половине суммы

$$\ldots + C_n^{\nu-4} + C_n^{\nu-2} + C_n^{\nu} + C_n^{\nu+2} + C_n^{\nu+4} + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2} 2^n = 2^{2\nu-1};$$

итак, получаем $2^{2\nu-2}$ — число произведений $\varphi_\alpha \varphi'_\beta$.

Теорема. *Произведение двух полуспиноров одного рода разлагается относительно группы вращений на полу-ν-вектор, $(\nu-2)$-вектор, $(\nu-4)$-вектор и т. д.*

Заметим, что произведение двух полуспиноров одного и того же рода не эквивалентно произведению двух полуспиноров другого рода, так как полу-ν-векторы различного рода не эквивалентны.

2° Рассмотрим теперь произведение $\varphi_\alpha\psi_\beta$ двух полуспиноров разного рода. Образуем величины $\xi^* \underset{(p)}{CX} \xi'$, где через ξ обозначена матрица $\begin{pmatrix}\varphi\\0\end{pmatrix}$, через ξ' — матрица $\begin{pmatrix}0\\\psi\end{pmatrix}$ и где p имеет четность, отличную от четности ν. Таким образом мы выделяем из данного произведения $(\nu-1)$-вектор, $(\nu-3)$-вектор и т. д., то есть тензоры, неэквивалентные между собой. Число их составляющих равно также $2^{2\nu-2}$, то есть числу произведений $\varphi_\alpha\varphi_\beta$, откуда.

Теорема. *Произведение двух полуспиноров различного рода разлагается относительно группы вращений на $(\nu-1)$-вектор, $(\nu-3)$-вектор и т. д.*

133. Разложение тензоров $\varphi_\alpha\varphi_\beta$ и $\psi_\alpha\psi_\beta$. Рассмотрим в предыдущих разложениях p-векторы, симметричные относительно двух полуспиноров φ, φ' или ψ, ψ'; получаем теорему:

Теорема. *Тензор $\varphi_\alpha\varphi_\beta$ разлагается относительно группы вращений на полу-ν-вектор, $(\nu-4)$-вектор, $(\nu-8)$-вектор и т. д. То же самое имеем для тензора $\psi_\alpha\psi_\beta$.*

При $\nu=2$ имеем полубивектор, при $\nu=3$ — полутривектор, при $\nu=4$ — скаляр и полу-4-вектор и т. д.

134. Применение к группе вращений для ν нечетного. В случае ν нечетного, величина $\varphi^*C\psi$, построенная на двух полуспинорах разного рода, инвариантна при каждом вращении. Эта величина равна

$$\sum(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}\xi_{i_1i_2\ldots i_p}\xi'_{i_{p+1}\ldots i_\nu},$$

причем сумма распространяется на все четные комбинации $(i_1i_2\ldots i_\nu)$ индексов $1, 2, \ldots, \nu$; p принимает все целые четные значения. В матрице, соответствующей вектору, мы располагаем составные индексы с четным числом индексов в каком-нибудь определенном порядке и затем остальные индексы в соответствующем порядке так, чтобы составному индексу $(i_1 i_2 \ldots i_p)$ соответствовал составной индекс $(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}(i_{p+1}\ldots i_\nu)$. Если мы обозначим тогда $2^{\nu-1}$ составляющих полуспинора φ через $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2^{\nu-1}}$, а соответствующие составляющие полуспинора ψ через $\psi_1, \psi_2, \ldots$, то увидим, что каждое вращение оставляет инвариантной сумму $\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2 + \ldots + \varphi_{2^{\nu-1}}\psi_{2^{\nu-1}}$. Таким образом, если через Σ мы обозначим матрицу порядка $2^{\nu-1}$, определяющую преобразование φ_α при вращении, матрица Σ^{*-1} определит преобразование величин ψ_α, так что матрица порядка 2^ν, соответствующая этому вращению, будет иметь вид

$$S = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \Sigma^{*-1} \end{pmatrix}.$$

Она преобразует вектор X в

$$X' = SXS^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \Sigma^{*-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \Xi \\ \mathrm{H} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & \Sigma^* \end{pmatrix},$$

откуда, в частности,

$$\Xi' = \Sigma\Xi\Sigma^*, \quad \mathrm{H}' = \Sigma^{*-1}\mathrm{H}\Sigma^{-1}.$$

Приходим к следующему замечательному результату:

Теорема. *В пространстве $E_{2\nu}$ (ν нечетное) каждое вращение, примененное к вектору, преобразует матрицу Ξ порядка $2^{\nu-1}$, соответствующую этому вектору, следующим образом:*

$$\Xi' = \Sigma\Xi\Sigma^*. \tag{3}$$

В частности, становясь на другую точку зрения, мы видим, что, *зная эффект применения вращения к полуспинору первого рода, мы знаем вполне эффект применения этого вращения к полуспинору второго рода.*

135. Случай ν четного. В случае ν четного дело обстоит совершенно иначе. В самом деле, зная одно из преобразований $\varphi' = \Sigma\varphi$, соответствующих данному вращению, мы можем ему сопоставить два различных преобразования над полуспинорами ψ и векторами. Например, тождественное преобразование $\varphi' = \varphi$

может получиться или от тождественного вращения, что дает тогда $\psi' = \psi$, $X' = X$, или от симметрии относительно начала, которой соответствуют матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (здесь $i^\nu = \pm 1$): первая из них дает

$$\varphi' = \varphi, \quad \psi' = -\psi, \quad X' = -X.$$

Аналогично этому, тождественному преобразованию над полуспинорами второго рода могут соответствовать два различных преобразовани.і над полуспинорами первого рода и векторами.

Таким образом, *вращения можно применять к трем видам объектов: полуспинорам первого рода, полуспинорам второго рода и векторам. Они дают три группы; между любыми двумя из них существует двузначное соответствие, если ν четно.*

136. Примечание. Матрицы Σ и T, которые вводятся как операторы над полуспинорами при применении вращения, унимодулярны. В самом деле, исследуем, в каких случаях определитель матрицы Ξ порядка $2^{\nu-1}$, соответствующей вектору, может обратиться в нуль. Если он равен нулю, то можно найти такой ненулевой полуспинор ψ, что $\Xi\psi = 0$; будем иметь $X\xi = 0$, где ξ — матрица $\begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix}$, откуда $X^2\xi = 0$. Следовательно, скалярный квадрат вектора равен нулю. Определитель матрицы Ξ поэтому является степенью $x^1x^{1'} + \ldots + x^\nu x^{\nu'}$, умноженной на числовой фактор, который может быть равен только ± 1, так как в каждую строку матрицы Ξ может входить только x^1 или $x^{1'}$, но не оба сразу. Если вектор единичный, определитель матрицы Ξ равен, следовательно, или всегда $+1$ или всегда -1. Матрица, являющаяся произведением двух единичных векторов

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha^{-1}\beta \end{pmatrix},$$

имеет, таким образом, то свойство, что обе матрицы, которые ее составляют, унимодулярны; то же имеет место и для матрицы, являющейся произведением четного числа единичных векторов.

Отметим, между прочим, что определитель матрицы Ξ для единичного вектора равен $+1$ или -1 в зависимости от порядка, в котором расположены составные индексы спинора.

IV. Частные случаи: $\nu=3$ и $\nu=4$.

137. Случай $\nu=3$. В следующей главе мы исследуем детально случай $\nu=2$, который интересен для квантовой механики. Случаи $\nu=3$ и $\nu=4$ представляют геометрический интерес.

При $\nu=3$ составляющие $\xi_0, \xi_{23}, \xi_{31}, \xi_{12}$ полуспинора первого рода можно рассматривать как однородные координаты точки в проективном пространстве 3 измерений, а соответствующие составляющие (п. 134) $\xi_{123}, -\xi_1, -\xi_2, -\xi_3$ полуспинора второго рода — как однородные координаты плоскости в этом пространстве. Величина

$$\varphi^* C\psi = \xi_0\xi_{123} - \xi_{23}\xi_1 - \xi_{31}\xi_2 - \xi_{12}\xi_3,$$

приравненная нулю, выражает инцидентность точки и плоскости. Величина $\varphi^* CX\varphi'$ определяет в эвклидовом пространстве E_6 изотропный вектор с ковариантными составляющими:

$$x_1 = \xi_{31}\xi'_{12} - \xi_{12}\xi'_{31}, \quad x_2 = \xi_{12}\xi'_{23} - \xi_{23}\xi'_{12}, \quad x_3 = \xi_{23}\xi'_{31} - \xi_{31}\xi'_{23},$$
$$x_{1'} = \xi_0\xi'_{23} - \xi_{23}\xi'_0, \quad x_{2'} = \xi_0\xi'_{31} - \xi_{31}\xi'_0, \quad x_{3'} = \xi_0\xi'_{12} - \xi_{12}\xi'_0;$$

составляющие этого вектора являются плюккеровыми координатами прямой, соединяющей точки φ и φ' трехмерного пространства. Величина $\psi^* CX\psi'$ также определяет в E_6 изотропный вектор

$$x_1 = \xi_{123}\xi'_1 - \xi_1\xi'_{123}, \quad x_2 = \xi_{123}\xi'_2 - \xi_2\xi'_{123}, \quad x_3 = \xi_{123}\xi'_3 - \xi_3\xi'_{123},$$
$$x_{1'} = \xi_3\xi'_2 - \xi_2\xi'_3, \quad x_{2'} = \xi_1\xi'_3 - \xi_3\xi'_1, \quad x_{3'} = \xi_2\xi'_1 - \xi_1\xi'_2;$$

составляющие этого вектора являются плюккеровыми координатами прямой пересечения двух плоскостей ψ и ψ' трехмерного пространства.

Полуспиноры все простые. Полуспинор первого рода φ определяет в E_6 изотропную 3-плоскость, то есть в трехмерном пространстве линейное многообразие прямых с двумя параметрами: это — связка прямых, проходящих через точку, изображающую полуспинор φ. Полуспинор второго рода ψ определяет аналогично двупараметрическое семейство прямых, расположенных в плоскости, интерпретирующей ψ. Изотропные 3-плоскости, соответствующие двум полуспинорам одного рода, должны иметь в E_6 общую прямую (п. 124), что соответствует основной теореме: две точки или две плоскости трехмерного пространства определяют прямую. Теорема, согласно которой 3-плоскости, соответствующие двум полуспинорам разного рода, не имеют в E_6 общих прямых или имеют общую 2-плоскость, соответствует теореме, что плоскость и точка в трехмерном пространстве не определяют вообще ни одной прямой и определяют пучок прямых, если точка лежит в плоскости.

Добавим, что, так как группа зависит от $\frac{6\times 5}{2}=15$ параметров, матрица Σ, соответствующая вращению, является унимодулярной матрицей 4-го порядка общего вида.

138. Случай $\nu=4$. Фундаментальная трилинейная форма. В случае $\nu=4$ полуспиноры каждого рода имеют 8 составляющих; в каждом роде существует квадратичный инвариант относительно группы вращений:

$$\xi_0\xi_{1234}-\xi_{23}\xi_{14}-\xi_{31}\xi_{24}-\xi_{12}\xi_{34} \tag{4}$$

для полуспиноров первого рода и

$$\xi_1\xi_{234}-\xi_2\xi_{134}+\xi_3\xi_{124}-\xi_4\xi_{123} \tag{5}$$

для полуспиноров второго рода.

Мы имеем таким образом, три пространства 8 измерений: пространство векторов, пространство полуспиноров первого рода и пространство полуспиноров второго рода; каждое из них имеет фундаментальную квадратичную форму, и в них мы имеем три группы, одинаковые в целом, но с соответствиями не взаимно однозначными, так как каждому элементу в одной из них соответствует по два различных элемента в каждой из двух остальных (п. 135).

Если эти три группы применять одновременно к векторам и двум родам полуспиноров, то они образуют группу G, оставляющую инвариантной трилинейную форму.

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{F} \equiv \varphi^* C X \psi = x^1 & (\xi_{12}\xi_{314} - \xi_{31}\xi_{124} - \xi_{14}\xi_{123} + \xi_{1234}\xi_1) + \\
& + x^2 (\xi_{23}\xi_{124} - \xi_{12}\xi_{234} - \xi_{24}\xi_{123} + \xi_{1234}\xi_2) + \\
& + x^3 (\xi_{31}\xi_{234} - \xi_{23}\xi_{314} - \xi_{34}\xi_{123} + \xi_{1234}\xi_3) + \\
& + x^4 (-\xi_{14}\xi_{234} - \xi_{24}\xi_{314} - \xi_{34}\xi_{124} + \xi_{1234}\xi_4) + \\
& + x^{1'} (-\xi_0\xi_{234} + \xi_{23}\xi_4 - \xi_{24}\xi_3 + \xi_{34}\xi_2) + \\
& + x^{2'} (-\xi_0\xi_{314} + \xi_{31}\xi_4 - \xi_{34}\xi_1 + \xi_{14}\xi_3) + \\
& + x^{3'} (-\xi_0\xi_{124} + \xi_{12}\xi_4 - \xi_{14}\xi_2 + \xi_{24}\xi_1) + \\
& + x^{4'} (\xi_0\xi_{123} - \xi_{23}\xi_1 - \xi_{31}\xi_2 - \xi_{12}\xi_3)
\end{aligned} \tag{6}
$$

и три квадратичные формы

$$
\left.
\begin{aligned}
F &\equiv x^1x^{1'} + x^2x^{2'} + x^3x^{3'} + x^4x^{4'}, \\
\Phi &\equiv \varphi^* C \varphi \equiv \xi_0\xi_{1234} - \xi_{23}\xi_{14} - \xi_{31}\xi_{24} - \xi_{12}\xi_{34}, \\
\Psi &\equiv \psi^* C \psi \equiv -\xi_1\xi_{234} - \xi_2\xi_{314} - \xi_3\xi_{124} + \xi_4\xi_{123}.
\end{aligned}
\right\} \tag{7}
$$

Обратно, каждая линейная подстановка 24 переменных x и ξ, преобразующая между собой векторы и полуспиноры каждого рода и оставляющая инвариантной трилинейную форму $\mathfrak{F}$, не меняет каждую из форм F, Φ, Ψ с точностью до постоянного множителя. Докажем это для формы F; из полученных ниже результатов будет вытекать доказательство для каждой из двух других форм Φ и Ψ. Инвариантность с точностью до множителя формы F следует из характерного свойства изотропного вектора — обращать в выродившуюся билинейную форму $\mathfrak{F}$ от φ_α и ψ_β. В самом деле, эта форма является выродившейся в том случае, если можно определить такой полуспинор ψ, что линейная форма $\mathfrak{F}$ от φ_α тождественно равна нулю; необходимое и достаточное условие этого выражается соотношением $CX\psi = 0$, или $X\varphi = 0$, а это равенство имеет место для полуспинора ψ, отличного от нуля, тогда и только тогда, если $X^2\psi = 0$, или $X^2 = 0$. Предложение доказано.

Рассмотрим теперь линейную подстановку, оставляющую инвариантными формы $\mathfrak{F}$, F, Φ и Ψ; она принадлежит группе G.

Для доказательства этого достаточно показать, что если она оставляет инвариантными все векторы, то она приводится или к $\varphi' = \varphi$, $\psi' = \psi$ или к $\varphi' = -\varphi$, $\psi' = -\psi$. Но если x^α инвариантны, то коэффициенты при x^α в форме $\mathfrak{F}$ также инвариантны. Например, преобразованная составляющая ξ_0, вследствие инвариантности коэффициентов при $x^{1'}$, $x^{2'}$, $x^{3'}$, $x^{4'}$, зависит, с одной стороны, только от ξ_0, ξ_{23}, ξ_{24}, ξ_{34}, с другой стороны, только от ξ_0, ξ_{31}, ξ_{34}, ξ_{14} и т. д., то есть она есть кратное ξ_0. То же самое имеем для других составляющих. Но нетрудно видеть, что множители при этих составляющих одни и те же для всех составляющих φ_α и одинаковы также (обратны предыдущим) для составляющих ψ_β. Инвариантность Φ и Ψ показывает, что они все равны $+1$ или все равны -1. Аналогичным рассуждением установим, что из инвариантности φ_α вытекает или $x' = x$, $\varphi' = \varphi$, или $x' = -x$, $\psi' = -\psi$.

139. Принцип тройственности. Покажем теперь, что группа G может быть дополнена пятью другими семействами линейных подстановок, оставляющих инвариантной форму $\mathfrak{F}$ и преобразующих между собой три формы F, Φ, Ψ, причем элементы каждого из этих новых семейств устанавливают определенную перестановку между тремя видами объектов: векторами, полуспинорами первого рода и полуспинорами второго рода.

Одно из этих семейств, обозначим его через G_{23}, получается комбинированием элементов группы G с симметрией A, преобразующей X в $-AXA$, φ в $A\varphi$ и ψ в $A\psi$; выбирая, например, $A = H_4 + H_{4'}$, получим преобразование

$$x^1 \to x^1, \quad x^2 \to x^2, \quad x^3 \to x^3, \quad x^4 \to -x^{4'},$$
$$x^{1'} \to x^{1'}, \quad x^{2'} \to x^{2'}, \quad x^{3'} \to x^{3'}, \quad x^{4'} \to -x^4;$$
$$\xi_0 \to \xi_4, \quad \xi_{23} \to \xi_{234}, \quad \xi_{31} \to \xi_{314}, \quad \xi_{12} \to \xi_{124},$$
$$\xi_{14} \to \xi_1, \quad \xi_{24} \to \xi_2, \quad \xi_{34} \to \xi_3, \quad \xi_{1234} \to \xi_{123};$$
$$\xi_1 \to -\xi_{14}, \quad \xi_2 \to -\xi_{24}, \quad \xi_3 \to -\xi_{34}, \quad \xi_4 \to -\xi_0,$$
$$\xi_{234} \to -\xi_{23}, \quad \xi_{314} \to -\xi_{31}, \quad \xi_{124} \to -\xi_{12}, \quad \xi_{123} \to -\xi_{1234},$$

семейство это является не чем иным, как семейством отражений.

Второе семейство, которое обозначим через G_{12}, преобразует между собой векторы и полуспиноры первого рода; оно получается при комбинировании элементов из G с преобразованием

$$x^1 \to -\xi_{23},\ x^2 \to -\xi_{31},\ x^3 \to -\xi_{12},\ x^4 \to -\xi_0,$$
$$x^{1'} \to \xi_{14},\ x^{2'} \to \xi_{24},\ x^{3'} \to \xi_{34},\ x^{4'} \to -\xi_{1234};$$
$$\xi_0 \to x^4,\ \xi_{23} \to x^1,\ \xi_{31} \to x^2,\ \xi_{12} \to x^3,$$
$$\xi_{14} \to -x^{1'},\ \xi_{24} \to -x^{2'}\ \xi_{34} \to -x^{3'},\ \xi_{1234} \to x^{4'};$$
$$\xi_1 \to \xi_1,\ \xi_2 \to \xi_2,\ \xi_3 \to \xi_3,\ \xi_4 \to -\xi_{123},$$
$$\xi_{234} \to \xi_{234},\ \xi_{314} \to \xi_{314},\ \xi_{124} \to \xi_{124},\ \xi_{123} \to -\xi_4.$$

Третье семейство, которое обозначим через G_{13}, преобразует между собой векторы и полуспиноры второго рода; оно получается комбинированием элементов из G с преобразованием

$$x^1 \to \xi_{234},\ x^2 \to \xi_{314},\ x^3 \to \xi_{124},\ x^4 \to -\xi_{123},$$
$$x^{1'} \to -\xi_1,\ x^{2'} \to -\xi_2,\ x^{3'} \to -\xi_3,\ x^{4'} \to -\xi_4;$$
$$\xi_0 \to -\xi_{1234},\ \xi_{23} \to \xi_{23},\ \xi_{31} \to \xi_{31},\ \xi_{12} \to \xi_{12},$$
$$\xi_{14} \to \xi_{14},\ \xi_{24} \to \xi_{24},\ \xi_{34} \to \xi_{34},\ \xi_{1234} \to -\xi_0;$$
$$\xi_1 \to x^{1'},\ \xi_2 \to x^{2'},\ \xi_3 \to x^{3'},\ \xi_4 \to x^{4'},$$
$$\xi_{234} \to -x^1,\ \xi_{314} \to -x^2,\ \xi_{124} \to -x^3,\ \xi_{123} \to x^4.$$

Наконец, произведение $G_{12}G_{13}$ образует четвертое семейство G_{132}, а произведение $G_{13}G_{12}$ — пятое семейство G_{123}. Например, одним из элементов семейства G_{123} является

$$x^1 \to -\xi_{23},\ x^2 \to -\xi_{31},\ x^3 \to -\xi_{12},\ x^4 \to -\xi_{1234},$$
$$x^{1'} \to \xi_{14},\ x^{2'} \to \xi_{24},\ x^{3'} \to \xi_{34},\ x^{4'} \to \xi_0;$$
$$\xi_0 \to -\xi_{123},\ \xi_{23} \to \xi_{234},\ \xi_{31} \to \xi_{314},\ \xi_{12} \to \xi_{124},$$
$$\xi_{14} \to \xi_1,\ \xi_{24} \to \xi_2,\ \xi_{34} \to \xi_3,\ \xi_{1234} \to -\xi_4;$$
$$\xi_1 \to x^{1'},\ \xi_2 \to x^{2'},\ \xi_3 \to x^{3'},\ \xi_4 \to -x^{4'},$$
$$\xi_{234} \to -x^1,\ \xi_{314} \to -x^2,\ \xi_{124} \to -x^3,\ \xi_{123} \to -x^{4'}.$$

Таким образом, в эвклидовой геометрии 8 измерений *в точке* имеет место *принцип тройственности*[1]) с тремя видами объектов (векторов, полуспиноров первого рода, полуспиноров второго рода), играющих совершенно одинаковую роль. Группа этой геометрии слагается из шести различных непрерывных семейств, соответствующих шести возможным перестановкам этих трех видов объектов; она характеризуется инвариантностью формы $\mathfrak{F}$ и формы $F+\Phi+\Psi$.

140. Параллелизм в пространстве E_8. Единичному бивектору, определенному двумя единичными взаимно перпендикулярными векторами A, A', можно отнести в эвклидовом пространстве полуспиноров данного рода, обладающем фундаментальной формой Φ или Ψ, *паратактическую конгруэнцию* единичных биполуспиноров φ, φ'; в этой конгруэнции существует один и только один биполуспинор, у которого первый полуспинор φ задан. Единичным полуспинором мы называем такой, который дает фундаментальной форме Φ численное значение, равное единице.

Заметим прежде всего, что матрица $X\varphi$, в которой ни один из множителей не равен нулю, может быть равна нулю только в том случае, если вектор X изотропный и полуспинор φ также изотропный (длины 0). Первое условие уже было доказано выше; предположим, что X приведен к вектору H_1; из равенства $H_1\xi=0$ вытекает тогда равенство нулю всех составляющих ξ_α, содержащих индекс 1, и, следовательно, равенство нулю выражения $\xi^*C\xi$, то есть фундаментальной формы Φ.

Пусть φ — единичный полуспинор. Определим такой полуспинор φ', чтобы

$$(A+iA')(\varphi+i\varphi')=0, \quad (A-iA')(\varphi-i\varphi')=0,$$

или

$$A\varphi-A'\varphi'=0, \quad A\varphi'+A'\varphi=0.$$

Первое уравнение дает $\varphi'=A'A\varphi$; подставляя во второе, получаем тождество, так как $AA'+A'A=0$. Сделанное выше

[1]) См. E. Cartan, *Le principe de dualité et la théorie des groupes simples et semi-simples* (Bull. Sc. Math., 49, 1925, стр. 361—374).

замечание показывает тогда, что $\varphi + i\varphi'$ и $\varphi - i\varphi'$ являются изотропными полуспинорами, то есть φ'—единичный полуспинор, перпендикулярный к φ.

Если воспользоваться языком проективной геометрии, то три пространства векторов и полуспиноров можно трактовать как семимерные пространства; прямая AA' первого пространства определяет в каждом из двух других *паратактическую конгруэнцию* прямых, обладающих тем свойством, что через каждую точку, не расположенную на фундаментальной квадрике, проходит одна и только одна прямая.

Зададим теперь единичный вектор A; он позволит нам определить в пространстве полуспиноров φ (или φ) эквиполлентность биполуспиноров. В самом деле, возьмем некоторый единичный биполуспинор (φ, φ'); равенства

$$A\varphi - A'\varphi' = 0 \quad A\varphi' + A'\varphi = 0,$$

в которых A, φ, φ' являются заданными, дают определенное решение для A': это зависит от симметричной роли векторов и полуспиноров[1]). Будем говорить, что два единичные биполуспинора (φ, φ'), (φ_1, φ_1') эквиполлентны, если для каждого из них можно найти один и тот же вектор A'. Употребляя теперь язык проективной геометрии, мы можем сказать, что задание точки в одном из трех пространств (не лежащей на фундаментальной квадрике) определяет в каждом из остальных пространств параллелизм прямых (не лежащих на фундаментальной квадрике и не касающихся ее), при котором через данную точку проходит одна и только одна прямая, параллельная данной, и две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой[2]).

141. Формула Бриоски. Можно поставить в связь с предыдущим исследованием формулу Бриоски, выражающую произведение двух сумм восьми квадратов в виде суммы восьми

---

[1]) Можно сказать также, что в данном пространстве векторов полуспиноры $\varphi + i\varphi'$, $\varphi - i\varphi'$ простые, и два соответствующих 4-вектора не имеют общего вектора; тогда можно провести через прямую вектора A одну и только одну 2-плоскость, пересекающую каждый из этих 4-векторов по прямой; на этих двух прямых лежат векторы $A + iA'$ и $A - iA'$.

[2]) См. F. Vaney, *Le parallélisme absolu, etc.* (Paris, Gauthier-Villars, 1929).

квадратов. Пусть X вектор, φ — полуспинор; произведение $X\varphi$ определяет полуспинор ψ. Имеем

$$\psi^* C\psi = \varphi^* X^* CX\varphi = \varphi^* CX^2\varphi,$$

откуда получаем следующий результат: скалярный квадрат полуспинора ψ равен произведению скалярного квадрата вектора X на скалярный квадрат полуспинора φ. Заметим, что составляющие полуспинора ψ являются билинейными формами составляющих X и составляющих φ. В развернутом виде формула дает:

$$(x^1x^{1'}+x^2x^{2'}+x^3x^{3'}+x^4x^{4'})(\xi_0\xi_{1234}-\xi_{23}\xi_{14}-\xi_{31}\xi_{24}-\xi_{12}\xi_{34}) =$$
$$=(\xi_0x^{1'}+\xi_{31}x^3+\xi_{12}x^2+\xi_{14}x^4)(\xi_{1234}x^1-\xi_{23}x^{4'}-\xi_{24}x^{3'}-\xi_{34}x^{2'})+$$
$$+(\xi_0x^{2'}-\xi_{12}x^1+\xi_{23}x^3+\xi_{24}x^4)(\xi_{1234}x^2-\xi_{31}x^{4'}+\xi_{34}x^{1'}-\xi_{14}x^{3'})+$$
$$+(\xi_0x^{3'}-\xi_{23}x^2+\xi_{31}x^1+\xi_{34}x^4)(\xi_{1234}x^3-\xi_{12}x^{4'}+\xi_{14}x^{2'}-\xi_{24}x^{1'})+$$
$$+(\xi_0x^{4'}-\xi_{14}x^1+\xi_{24}x^2-\xi_{34}x^3)(\xi_{1234}x^4+\xi_{23}x^{1'}+\xi_{31}x^{2'}+\xi_{12}x^{3'}).$$

Если мы предположим, что $x^{1'}$, $x^{2'}$, $x^{3'}$, $x^{4'}$ являются комплексно сопряженными с x^1, x^2, x^3, x^4, а ξ_{1234}, $-\xi_{14}$, $-\xi_{24}$, $-\xi_{34}$ комплексно сопряженными с ξ_0, ξ_{23}, ξ_{31}, ξ_{12}, то в четырех произведениях правой части оба множителя будут комплексно сопряженными. Мы получаем, таким образом, формулу Бриоски в *вещественной области;* произведение двух сумм восьми квадратов является суммой восьми квадратов. Полагая

$$x^1 = X_0+iX_1,\quad x^2 = X_4+iX_3,\quad x^3 = X_6+iX_2,\quad x^4 = X_7+iX_5,$$
$$\xi_0 = Y_0+iY_1,\quad \xi_{14} = Y_7-iY_5,\quad \xi_{24} = Y_6+iY_2,\quad \xi_{34} = -Y_4-iY_3,$$

получаем формулу

$$(X_0^2+X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2+X_5^2+X_6^2+X_7^2)\times$$
$$\times(Y_0^2+Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2+Y_4^2+Y_5^2+Y_6^2+Y_7^2)=$$
$$=Z_0^2+Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2+Z_5^2+Z_6^2+Z_7^2,$$

где

$$Z_0 = X_0Y_0+X_1Y_1+X_2Y_2+X_3Y_3+X_4Y_4+X_5Y_5+$$
$$+X_6Y_6+X_7Y_7,$$
$$Z_l = X_0Y_l-Y_0X_l+X_{l+1}Y_{l+5}-X_{l+5}Y_{l+1}+X_{l+2}Y_{l+3}-$$
$$-X_{l+3}Y_{l+2}+X_{l+4}Y_{l+6}-X_{l+6}Y_{l+4}\quad (l=1,\ 2,\ \ldots,\ 7),$$

причем индексы $i+1$, $i+2$, $i+3$, $i+4$, $i+5$, $i+6$ берутся по модулю 7.

Если применить формулу Бриоски к двум единичным векторам $\vec{X}$ и $\vec{Y}$, то она дает отображение на сферическое пространство 7 измерений топологического произведения двух сферических пространств 7 измерений.

Добавим еще одно замечание. Рассмотрим 7-мерное эвклидово пространство, полагая $X_0 = Y_0 = 0$. Вектор $\vec{Z}$ с составляющими $Z_1, Z_2, \ldots, Z_7$ соответствует бивектору, построенному на двух единичных взаимно перпендикулярных векторах $\vec{X}$ и $\vec{Y}$; он перпендикулярен к этому бивектору, что нетрудно проверить вычислением. Три вектора, $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$, определяют 3-плоскость, в которой каждый вектор соответствует 2-плоскости, ему перпендикулярной. Через 2-плоскость проходит одна и только одна такая 3-плоскость.

V. Случай вещественного эвклидова пространства

142. Матрицы, соответствующие вещественным векторам. Будем считать координаты x^i, $x^{i'}$ комплексно сопряженными. Мы знаем (п. 112), что тогда матрица X, соответствующая вектору, является эрмитовой, то есть матрица H порядка $2^{\nu-1}$ равна транспонированной сопряженной с Ξ. Если вектор единичный, то H является матрицей, обратной матрице Ξ, причем эта последняя унитарна. Отсюда нетрудно вывести, что у матрицы $\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$, определяющей вращение, составляющие матрицы — унитарные унимодулярные.

143. Сопряженные спиноры. Как и в вещественном пространстве $E_{2\nu+1}$, за спинор, сопряженный спинору ξ, можно принять

$$\xi' = i^{\nu} C \bar{\xi};$$

ξ' преобразуется вещественной симметрией A как спинор, если ν четное, и не преобразуется как спинор, если ν нечетное (п. 114).

Отсюда вытекает, что величины $\bar{\xi}^*X\xi$ дают p-вектор или $(n-p)$-вектор в зависимости от четности или нечетности p (п. 114). Скаляр $\bar{\xi}^*\xi$ является суммой квадратов модулей составляющих ξ_α.

Тензор $\bar{\xi}_\alpha\xi_\beta$ разлагается на скаляр, вектор, бивектор, ... n-вектор.

144. Сопряженные полуспиноры. Полуспинор, сопряженный с данным, того же рода, что и данный, если ν четное, и другого рода, если ν нечетное.

При ν нечетном произведение полуспинора на его сопряженный разлагается на вещественные скаляр, бивектор, ..., $(\nu-1)$-вектор. При четном ν разложение дает также скаляр. бивектор и т. д., но этот ряд оканчивается полу-ν-вектором,

145. Параллелизмы в эллиптическом пространстве 7 измерений. При $\nu=4$ три пространства: 1° векторов, 2° полуспиноров первого рода, 3° полуспиноров второго рода являются вещественными эвклидовыми пространствами. Каждый вещественный единичный вектор одного из этих пространств дает в любом из двух других эквиполентность для единичных бивекторов. Отсюда вытекает с точки зрения проективной геометрии существование ∞^2 параллелизмов для ориентированных прямых в эллиптическом пространстве (вещественном проективном) 7 измерений.

VI. Случай псевдоэвклидовых пространств

146. Сопряженные спиноры. Предположим, как и пространстве $E_{2\nu+1}$, что координаты x^i и $x^{i'}$ $(i=1, 2, \ldots, \nu-h)$ — комплексно сопряжены, а $x^{\nu-h+1}, \ldots, x^\nu$; $x^{(\nu-h+1)'}, \ldots, x^{\nu'}$ — вещественны. Результаты, полученные для $E_{2\nu+1}$, переносятся без изменения в $E_{2\nu}$. Так, спинор, сопряженный с ξ, может быть определен формулой

$$\xi' = i^{\nu-h} I\bar{\xi},$$

где

$$I = (H_1 - H_{1'}) \ldots (H_{\nu-h} - H_{(\nu-h)'}).$$

Величина, сопряженная спинору, преобразуется при симметрии вещественного пространства как спинор, если ν и h одинаковой четности (п. 117).

Можно доказать также, что разложение произведения спинора на его сопряженный дает скаляр $\bar{\xi}^* J \xi$, вектор, ..., n-вектор.

147. Сопряженные полуспиноры. Два сопряженных полуспинора принадлежат к одному и тому же роду или к разным, в зависимости от того, одинаковой или разной четности являются числа h и ν.

Если h четное, то произведение полуспинора на его сопряженный разлагается на скаляр, бивектор и т. д., причем последний неприводимый тензор разложения является $(\nu-1)$-вектором, если ν нечетное, и полу-ν-вектором, если ν четное.

Если h нечетное, то произведение полуспинора на его сопряженный разлагается на вектор, тривектор и т. д., причем последний тензор является $(\nu-1)$-вектором, если ν четное, и полу-ν-вектором, если ν нечетное.

При $\nu=3$ все полуспиноры простые. Если $h=1$ или 3, то вектор, определенный полуспинором и его сопряженным, лежит на прямой, общей двум соответствующим изотропным 3-плоскостям, комплексно сопряженным одна относительно другой; этот вектор, следовательно, вещественный и изотропный. Если $h=3$, то два сопряженных полуспинора могут быть тождественны, и в этом случае вектор равен нулю. При $h=2$ две соответствующие 3-плоскости тогда и только тогда имеют общую прямую (и тогда они имеют общую вещественную изотропную 2-плоскость), если скаляр $\bar{\xi}^* J \xi$ равен нулю, то есть

$$\bar{\xi}_0 \xi_{23} + \bar{\xi}_{12} \xi_{31} - \bar{\xi}_{31} \xi_{12} - \bar{\xi}_{23} \xi_0 = 0.$$

ГЛАВА VII

СПИНОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ЧАСТНОГО ПРИНЦИПА ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

I. Группа вращений в эвклидовом пространстве четырех измерений

148. Матрицы, соответствующие p-вектору. Рассмотрим фундаментальную форму

$$F = x^1 x^{1'} + x^2 x^{2'}.$$

Общие формулы непосредственно дают матрицы, соответствующие вектору, бивектору, тривектору, 4-вектору.

Для вектора имеем матрицу

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x^1 & x^2 \\ 0 & 0 & x^{2'} & -x^{1'} \\ x^{1'} & x^2 & 0 & 0 \\ x^{2'} & -x^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad (1)$$

для бивектора —

$$\underset{(2)}{X} = \begin{pmatrix} \frac{x^{11'}+x^{22'}}{2} & x^{12} & 0 & 0 \\ x^{2'1'} & -\frac{x^{11'}+x^{22'}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{x^{11'}-x^{22'}}{2} & x^{1'2} \\ 0 & 0 & x^{2'1} & \frac{x^{11'}-x^{22'}}{2} \end{pmatrix}; \qquad (2)$$

для тривектора

$$\underset{(3)}{X} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & x^{122'} & x^{11'2} \\ 0 & 0 & -x^{11'2'} & x^{1'22'} \\ x^{1'22'} & -x^{11'2} & 0 & 0 \\ x^{11'2'} & x^{122'} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

наконец, для 4-вектора имеем

$$\underset{(4)}{X}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} x^{11'22'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^{11'22'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x^{11'22'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x^{11'22'} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

149. Случай прямоугольных координат. Если взять прямоугольные координаты, заменяя x^1, $x^{1'}$, x^2, $x^{2'}$ через

$$x^1+ix^2,\ x^1-ix^2,\ x^3+ix^4,\ x^3-ix^4,$$

то получим для вектора матрицу

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & x^1+ix^2 & x^3+ix^4 \\ 0 & 0 & x^3-ix^4 & -x^1+ix^2 \\ x^1-ix^2 & x^3+ix^4 & 0 & 0 \\ x^3-ix^4 & -x^1-ix^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Матрица $\underset{(2)}{X}$ бивектора имеет вид

$$\underset{(2)}{X}=\begin{pmatrix} \underset{(2)}{\Xi} & 0 \\ 0 & \underset{(2)}{\mathrm{H}} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где

$$\underset{(2)}{\Xi}=\begin{pmatrix} -i(x^{12}+x^{34}) & -(x^{31}+x^{24})+i(x^{23}+x^{14}) \\ x^{31}+x^{24}+i(x^{23}+x^{14}) & i(x^{12}+x^{34}) \end{pmatrix} \tag{7}$$

является матрицей полубивектора первого рода с составляющими

$$x^{23}+x^{14},\ x^{31}+x^{24},\ x^{12}+x^{34}$$

и где

$$\underset{(2)}{\mathrm{H}}=\begin{pmatrix} i(x^{12}-x^{34}) & -(x^{31}-x^{24})-i(x^{23}-x^{14}) \\ x^{31}-x^{24}-i(x^{23}-x^{14}) & -i(x^{12}-x^{34}) \end{pmatrix} \tag{8}$$

является матрицей полубивектора второго рода с составляющими

$$x^{23}-x^{14},\ x^{31}-x^{24},\ x^{12}-x^{34}.$$

Если взять координаты, употребляемые в частном принципе относительности, с фундаментальной формой

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-c^2(x^4)^2,$$

то получим для вектора матрицу

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & x^1+ix^2 & x^3+cx^4 \\ 0 & 0 & x^3-cx^4 & -x^1+ix^2 \\ x^1-ix^2 & x^3+cx^4 & 0 & 0 \\ x^3-cx^4 & -x^1-ix^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

затем матрицу

$$\underset{(2)}{\Xi}=\begin{pmatrix} -i(x^{12}-icx^{34}) & -(x^{31}-icx^{24})+i(x^{23}-icx^{14}) \\ x^{31}-icx^{24}+i(x^{23}-icx^{14}) & i(x^{12}-icx^{34}) \end{pmatrix}, \qquad (10)$$

соответствующую полубивектору первого рода с составляющими

$$x^{23}-icx^{14},\quad x^{31}-icx^{24},\quad x^{12}-icx^{34},$$

и матрицу

$$\underset{(2)}{H}=\begin{pmatrix} i(x^{12}+icx^{34}) & -(x^{31}+icx^{24})-i(x^{23}+icx^{14}) \\ x^{31}+icx^{24}-i(x^{23}+icx^{14}) & -i(x^{12}+icx^{34}) \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

соответствующую полубивектору второго рода с составляющими

$$x^{23}+icx^{14},\qquad x^{31}+icx^{24},\qquad x^{12}+icx^{34};$$

ковариантные составляющие этих полубивекторов соответственно имеют следующий вид:

$$x_{23}+\frac{i}{c}x_{14},\qquad x_{31}+\frac{i}{c}x_{24},\qquad x_{12}+\frac{i}{c}x_{34},$$

$$x_{23}-\frac{i}{c}x_{14},\qquad x_{31}-\frac{i}{c}x_{24},\qquad x_{12}-\frac{i}{c}x_{34}.$$

150. Группа вращений комплексного пространства. Каждый единичный вектор A выражается в виде

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

где матрица второго порядка имеет определитель, равный -1. Симметрия, соответствующая этому вектору, преобразует полуспиноры φ и ψ следующим образом:

$$\varphi' = a\psi, \quad \psi' = a^{-1}\varphi,$$

а вектор $X = \begin{pmatrix} 0 & \Xi \\ \mathrm{H} & 0 \end{pmatrix}$ по формулам

$$\Xi' = -a\mathrm{H}a,$$
$$\mathrm{H}' = -a^{-1}\Xi a^{-1}.$$

Произведение двух симметрий A, B дает соотношения

$$\left.\begin{aligned} \varphi' = \beta a^{-1}\varphi, \quad \psi' = \beta^{-1}a\psi, \\ \Xi' = \beta a^{-1}\Xi a^{-1}\beta, \\ \mathrm{H}' = \beta^{-1}a\,\mathrm{H}\,a\beta^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Положим

$$\beta a^{-1} = s, \quad \beta^{-1}a = t,$$

где s и t — унимодулярные матрицы; имеем

$$\varphi' = s\varphi, \qquad \psi' = t\psi; \tag{13}$$

$$\Xi' = s\Xi t^{-1}, \ \mathrm{H}' = t\mathrm{H}s^{-1}; \tag{14}$$

эти формулы относятся к простому вращению. Формулы, определяющие вращение общего вида, имеют ту же самую форму. В частности, каждое вращение вектора X определяется формулой

$$X' = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} = SXS^{-1}, \tag{15}$$

где s и t — унимодулярные матрицы второго порядка.

Обратно, пусть s и t являются любыми унимодулярными матрицами второго порядка; я утверждаю, что соотношения (15) определяют вращение четырехмерного пространства. Для этого надо доказать, что

1° если X — матрица, соответствующая вектору, то X' также является матрицей, соответствующей вектору;

2° квадрат матрицы X' равен квадрату матрицы X.

Второе предложение очевидно, так как

$$X'^2 = SX^2S^{-1} = \vec{x}^2 SS^{-1} = \vec{x}^2.$$

Что касается первого, то оно справедливо, если X является матрицей единичного вектора, то есть если определитель матрицы Ξ равен -1, а H является матрицей, обратной Ξ, так как тогда на основании (14) определитель матрицы Ξ' равен также -1 и H' является матрицей, обратной Ξ'. Общий случай выводится непосредственно из этого частного.

Теорема. *Наиболее общее вращение комплексного эвклидова пространства 4 измерений определяется формулами*

$$\xi' = S\xi, \quad X' = SXS^{-1}, \tag{16}$$

где матрица S имеет вид $\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$, причем s и t — произвольные унимодулярные комплексные матрицы.

Группа вращений является *прямым произведением* двух групп линейных унимодулярных подстановок двух переменных.

Если мы рассмотрим, в частности, результат преобразования бивектора $\begin{pmatrix} \underset{(2)}{\Xi} & 0 \\ 0 & \underset{(2)}{\mathrm{H}} \end{pmatrix}$, то получим

$$\underset{(2)}{\Xi'} = s\underset{(2)}{\Xi}s^{1-}, \quad \underset{(2)}{H'} = t\underset{(2)}{\mathrm{H}}t^{-1}. \tag{17}$$

Каждый из двух родов полубивекторов преобразуется группой, изоморфной группе вращений трехмерного комплексного пространства. Отметим, что согласно формулам (17) определитель каждой матрицы $\underset{(2)}{\Xi}$ и $\underset{(2)}{\mathrm{H}}$ является инвариантом группы вращений; эти инварианты определяются следующими выражениями:

$$-\frac{1}{4}(x^{11'} + x^{22'})^2 + x^{12}x^{1'2'}, \quad -\frac{1}{4}(x^{11'} - x^{22'})^2 + x^{12'}x^{1'2}; \tag{18}$$

они являются квадратичными формами составляющих соответствующих полубивекторов, в соответствии с найденным выше результатом. В прямоугольных координатах имеем два инварианта

$$\left.\begin{aligned} &(x^{23}+x^{14})^2+(x^{31}+x^{24})^2+(x^{12}+x^{34})^2, \\ &(x^{23}-x^{14})^2+(x^{31}-x^{24})^2+(x^{12}-x^{34})^2, \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

откуда вычитанием получаем инвариант $x^{23}x^{14}+x^{31}x^{24}+x^{12}x^{34}$, равенство нулю которого выражает условие простоты бивектора. В частном принципе относительности имеем два инварианта:

$$\left.\begin{aligned} &(x^{23}-icx^{14})^2+(x^{31}-icx^{24})^2+(x^{12}-icx^{34})^2, \\ &(x^{23}+icx^{14})^2+(x^{31}+icx^{24})^2+(x^{12}+icx^{34})^2. \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

В частности, мы видим, что каждый простой бивектор может быть изображен двумя векторами одинаковой длины трехмерного пространства; результат применения вращения 4-мерного пространства к бивектору эквивалентен результату применения к каждому из этих двух векторов независимых друг от друга вращений.

151. Случай вещественного эвклидова пространства. Формула (5) показывает, что матрица a, являющаяся одной из составляющих матрицы A, соответствующей вещественному единичному вектору, является унитарной с определителем, равным -1; в самом деле, матрица A — эрмитова, то есть $\bar{a}=a^{*-1}$. Унимодулярные матрицы $s=-\beta a^{-1}$ и $t=-\beta^{-1}a$ являются тогда унитарными, откуда следует

Теорема. *Каждое вращение в вещественном эвклидовом пространстве 4 измерений определяется формулами* (15), *в которых матрицы s и t являются любыми унитарными унимодулярными матрицами.*

В частности, составляющие $x^{23}+x^{14}$, $x^{31}+x^{24}$, $x^{12}+x^{34}$ полубивектора преобразуются вещественной ортогональной подстановкой с определителем, равным 1.

152. Случай пространства частного принципа относительности. В пространстве частного принципа относительности матрица a, которая входит в матрицу A, соответствующую вещественному единичному вектору, сопряжена с a^{-1}:

$$\bar{a}=a^{-1};$$

матрицы s и t в этом случае являются унимодулярными, взаимно комплексно сопряженными.

Теорема. *Всякое собственное вращение пространства частного принципа относительности определяется формулами:*

$$\xi' = S\xi, \quad X' = SXS^{-1}, \quad S = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & \bar{s} \end{pmatrix},$$

где s — произвольная унимодулярная комплексная матрица второго порядка, $\bar{s}$ — ее сопряженная.

Таким образом, мы видим, что *Лоренцева группа собственных вращений изоморфна группе комплексных унимодулярных подстановок двух переменных, то есть группе вращений эвклидова комплексного пространства 3 измерений*[1]).

Собственные отражения в применении к спинорам определяются формулами:

$$\varphi' = s\psi, \quad \psi' = \bar{s}\varphi, \quad |s| = -1.$$

II. Разложение произведения двух спиноров

153. Произведение двух различных спиноров. На основании общей теоремы п. **131** произведение двух спиноров разлагается на скаляр, вектор, бивектор, тривектор и 4-вектор. Бивектор в свою очередь разлагается на два полубивектора. Это разложение дают величины $\xi^* \underset{(p)}{CX} \xi'$. Находим следующие результаты:

1° Скаляр равен

$$\xi_0\xi'_{12} - \xi_{12}\xi'_0 + \xi_2\xi'_1 - \xi_1\xi'_2.$$

---

[1]) *Полувектор* первого (второго) рода Эйнштейна и Майера является не чем иным, как совокупностью двух полуспиноров первого (второго) рода; он не имеет чисто геометрического определения; его преобразование задается матрицей s ($\bar{s}$). См. A. Einstein, W. Mayer, *Semi-Vektoren und Spinoren* (Sitzungsb. Akad. Berlin, 1932, стр. 522—550), а также J. A. Schouten, *Zur generellen Feldtheorie, Semi-Vektoren und Spinraum* (Zeitschr. für Physik, 84, 1933, стр. 92—111).

2° Тривектор определяется следующими ковариантными составляющими:

$$x_{122'} = \xi_1\xi'_{12} - \xi_{12}\xi'_1, \qquad x_{11'2} = \xi_2\xi'_{12} - \xi_{12}\xi'_2,$$
$$x_{1'22'} = -\xi_2\xi'_0 + \xi_0\xi'_2, \qquad x_{11'2'} = -\xi_0\xi'_1 + \xi_1\xi'_0.$$

3° Полубивектор первого рода имеет ковариантные составляющие:

$$x_{12} = -\xi_{12}\xi'_{12}, \qquad x_{1'2'} = -\xi_0\xi'_0, \qquad x_{11'} + x_{22'} = -(\xi_0\xi'_{12} + \xi_{12}\xi'_0),$$

полубивектор второго рода —

$$x_{1'2} = \xi_2\xi'_2, \quad x_{12'} = \xi_1\xi'_1, \quad x_{11'} - x_{22'} = -(\xi_1\xi'_2 + \xi_2\xi'_1).$$

4° Вектор определяется следующими ковариантными составляющими:

$$x_1 = \frac{1}{2}(\xi_1\xi'_{12} + \xi_{12}\xi'_1), \quad x_2 = \frac{1}{2}(\xi_2\xi'_{12} + \xi_{12}\xi'_2),$$
$$x_{1'} = \frac{1}{2}(\xi_0\xi'_2 + \xi_2\xi'_0), \qquad x_{2'} = -\frac{1}{2}(\xi_0\xi'_1 + \xi_1\xi'_0).$$

5° Наконец, 4-вектор имеет составляющую, равную

$$x_{11'22'} = \frac{1}{4}(\xi_0\xi'_{12} - \xi_{12}\xi'_0 + \xi_1\xi'_2 - \xi_2\xi'_1).$$

154. Полуспиноры как поляризованные изотропные бивекторы. Мы получаем конкретное определение полуспиноров как поляризованных изотропных полубивекторов, полагая $\xi' = \xi$; это дает для изотропного бивектора первого рода

$$x_{12} = -\xi_{12}^2, \quad x_{1'2'} = -\xi_0^2, \quad x_{11'} + x_{22'} = -2\xi_0\xi_{12};$$
$$x_{1'2} = 0, \qquad x_{12'} = 0, \qquad x_{11'} - x_{22'} = 0;$$

для изотропного бивектора второго рода —

$$x_{1'2} = \xi_2^2, \quad x_{12'} = \xi_1^2, \quad x_{11'} - x_{22'} = -2\xi_1\xi_2;$$
$$x_{12} = 0, \quad x_{1'2'} = 0, \quad x_{11'} + x_{22'} = 0\,[1]).$$

---

[1]) M. E. T. Whittaker недавно отметил эту связь между некоторыми бивекторами частного принципа относительности и полуспинорами: *On the relations of the tensor-calculus to the spinor-calculus* (Proc. R. Soc. London, 158, 1937, стр. 38—46).

В пространстве частного принципа относительности можно дать другую интерпретацию полуспиноров. Воспользуемся уже введенными координатами x^1, x^2, x^3, x^4. Бивекторный квадрат спинора дается формулами

$$\left.\begin{aligned} cx^{14}+ix^{23} &= \frac{1}{2}(-\xi_0^2+\xi_{12}^2),\\ cx^{24}+ix^{31} &= \frac{i}{2}(\xi_0^2+\xi_{12}^2),\\ cx^{34}+ix^{12} &= -\xi_0\xi_{12}, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned} cx^{14}-ix^{23} &= \frac{1}{2}(\xi_1^2-\xi_2^2),\\ cx^{24}-ix^{31} &= \frac{i}{2}(\xi_1^2+\xi_2^2),\\ cx^{34}-ix^{12} &= \xi_1\xi_2. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Формулы (21) позволяют выразить полуспинор (ξ_0, ξ_{12}) при помощи *вещественного* бивектора x^{ij}, удовлетворяющего двум соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} c^2\left[(x^{14})^2+(x^{24})^2+(x^{34})^2\right] &= (x^{23})^2+(x^{31})^2+(x^{12})^2,\\ x^{14}x^{23}+x^{24}x^{31}+x^{34}x^{12} &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

полуспинор является не чем иным, как этим *поляризованным* бивектором. С точки зрения физики этот бивектор может быть рассматриваем как совокупность *электрического поля* (x^{14}, x^{24}, x^{34}) и *магнитного* (x^{23}, x^{31}, x^{12}), взаимно перпендикулярных; отношение их интенсивностей равно обратной величине скорости света $\frac{1}{c}$. *Два поля, которые вводятся в электромагнитной теории света, обладают как раз этой природой.* Полуспинору (ξ_1, ξ_2) можно дать аналогичную интерпретацию, пользуясь формулами (22).

Такая интерпретация при помощи вещественного образа возможна только в пространственно-временном континууме частного принципа относительности, но не в эвклидовом вещественном пространстве четырех измерений.

III. Сопряженные векторы и спиноры в пространстве частного принципа относительности

155. Сопряженные спиноры. Матрицы, соответствующие двум комплексно сопряженным векторам, имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x^1 & x^2 \\ 0 & 0 & x^2 & -x^{1'} \\ x^{1'} & x^2 & 0 & 0 \\ x^{2'} & -x^1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \overline{x}^{1'} & \overline{x}^2 \\ 0 & 0 & \overline{x}^{2'} & -\overline{x}^1 \\ \overline{x}^1 & \overline{x}^2 & 0 & 0 \\ \overline{x}^{2'} & -\overline{x}^{1'} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} 0 & \Xi \\ \mathrm{H} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & \overline{\mathrm{H}} \\ \overline{\Xi} & 0 \end{pmatrix};$$

вторая матрица Y выводится из первой X при помощи формулы (п. 116)

$$Y = -I\overline{X}I^* = (H_1 - H_{1'})\overline{X}(H_1 - H_{1'}).$$

Аналогично для спинора ξ', сопряженного данному ξ, имеем формулу

$$\xi' = i(H_1 - H_{1'})\overline{\xi} = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\overline{\xi},$$

из которой вытекает

$$\varphi' = i\overline{\psi}, \quad \psi' = -i\overline{\varphi},$$

или, более подробно,

$$\xi'_0 = i\overline{\xi}_1, \quad \xi'_{12} = i\overline{\xi}_2, \quad \xi'_1 = -i\overline{\xi}_0, \quad \xi'_2 = -i\overline{\xi}_{12}. \tag{24}$$

156. Разложение произведения двух сопряженных спиноров. Результаты п. 146 дают непосредственно разложение произведения двух сопряженных спиноров на скаляр, вектор, бивектор, тривектор и 4-вектор.

Мы вычислим эти различные тензоры, пользуясь координатами частного принципа относительности, в которых фундаментальная форма имеет вид

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - c^2(x^4)^2;$$

матрицы, соответствующие векторам базиса, следующие:

$$A_1 = H_1 + H_{1'}, \quad A_2 = i(H_1 - H_{1'}),$$
$$A_3 = H_2 + H_{2'}, \quad A_4 = c(H_2 - H_{2'}).$$

Здесь матрица J, введенная в п. 116, равна $H_2 - H_{2'}$. Мы должны рассмотреть величины $\bar{\xi}^* J \underset{(p)}{X} \xi$, причем мы будем умножать каждую из них на некоторый постоянный множитель, чтобы иметь вещественные p-векторы.

1° Имеем 4-вектор с составляющей

$$i\bar{\xi}^* J\xi = -i(\xi_0\bar{\xi}_2 - \xi_{12}\bar{\xi}_1 + \xi_1\bar{\xi}_{12} - \xi_2\bar{\xi}_0). \tag{25}$$

2° Имеем вектор, определяемый величиной $\bar{\xi}^* JX\xi$; его контравариантные составляющие определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned}
x^1 &= -(\xi_0\bar{\xi}_{12} + \xi_{12}\bar{\xi}_0 + \xi_1\bar{\xi}_2 + \xi_2\bar{\xi}_1),\\
x^2 &= i(\xi_0\bar{\xi}_{12} - \xi_{12}\bar{\xi}_0 - \xi_1\bar{\xi}_2 + \xi_2\bar{\xi}_1),\\
x^3 &= \xi_0\bar{\xi}_0 - \xi_{12}\bar{\xi}_{12} + \xi_1\bar{\xi}_1 - \xi_2\bar{\xi}_2,\\
x^4 &= \frac{1}{c}(\xi_0\bar{\xi}_0 + \xi_{12}\bar{\xi}_{12} + \xi_1\bar{\xi}_1 + \xi_2\bar{\xi}_2).
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

На основании общей теоремы (п. 119) это — временной вектор, скалярный квадрат которого равен

$$-4(\xi_0\bar{\xi}_2 - \xi_{12}\bar{\xi}_1)(\xi_2\bar{\xi}_0 - \xi_1\bar{\xi}_{12}).$$

3° Имеем бивектор, определяемый величиной $\bar{\xi}^* J \underset{(2)}{X} \xi$; его контравариантные составляющие имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
x^{23} &= i(\xi_0\bar{\xi}_1 - \xi_{12}\bar{\xi}_2 - \xi_1\bar{\xi}_0 + \xi_2\bar{\xi}_{12}),\\
x^{31} &= \xi_0\bar{\xi}_1 + \xi_{12}\bar{\xi}_2 + \xi_1\bar{\xi}_0 + \xi_2\bar{\xi}_{12},\\
x^{12} &= i(\xi_0\bar{\xi}_2 + \xi_{12}\bar{\xi}_1 - \xi_1\bar{\xi}_{12} - \xi_2\bar{\xi}_0),\\
x^{14} &= \frac{1}{c}(-\xi_0\bar{\xi}_1 + \xi_{12}\bar{\xi}_2 - \xi_1\bar{\xi}_0 + \xi_2\bar{\xi}_{12}),\\
x^{24} &= \frac{i}{c}(\xi_0\bar{\xi}_1 + \xi_{12}\bar{\xi}_2 - \xi_1\bar{\xi}_0 - \xi_2\bar{\xi}_{12}),\\
x^{34} &= -\frac{1}{c}(\xi_0\bar{\xi}_2 + \xi_{12}\bar{\xi}_1 + \xi_1\bar{\xi}_{12} + \xi_2\bar{\xi}_0).
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Он разлагается на два комплексно сопряженных бивектора:

$$\left.\begin{aligned}
x^{23}-icx^{14}&=2i\,(\xi_0\overline{\xi}_1-\xi_{12}\overline{\xi}_2),\\
x^{23}+icx^{14}&=2i\,(-\xi_1\overline{\xi}_0+\xi_2\overline{\xi}_{12}),\\
x^{31}-icx^{24}&=2\,(\xi_0\overline{\xi}_1+\xi_{12}\overline{\xi}_2),\\
x^{31}+icx^{24}&=2\,(\xi_1\overline{\xi}_0+\xi_2\overline{\xi}_{12}),\\
x^{12}-icx^{34}&=2i\,(\xi_0\overline{\xi}_2+\xi_{12}\overline{\xi}_1),\\
x^{12}+icx^{34}&=-2i\,(\xi_1\overline{\xi}_{12}+\xi_2\overline{\xi}_0).
\end{aligned}\right\}\tag{28}$$

Сумма квадратов составляющих первого равна $-4\,(\xi_0\overline{\xi}_2-\xi_{12}\overline{\xi}_1)^2$; сумма квадратов составляющих второго равна $-4\,(\xi_2\overline{\xi}_0-\xi_1\overline{\xi}_{12})^2$.

4° Имеем тривектор, определяемый величиной $i\overline{\xi}^*\underset{(3)}{J}X\xi$, с составляющими

$$\left.\begin{aligned}
x^{234}&=\frac{1}{c}\,(-\xi_0\overline{\xi}_{12}-\xi_{12}\overline{\xi}_0+\xi_1\overline{\xi}_2+\xi_2\overline{\xi}_1),\\
x^{314}&=\frac{i}{c}\,(\xi_0\overline{\xi}_{12}-\xi_{12}\overline{\xi}_0+\xi_1\overline{\xi}_2-\xi_2\overline{\xi}_1),\\
x^{124}&=\frac{1}{c}\,(\xi_0\overline{\xi}_0-\xi_{12}\overline{\xi}_{12}-\xi_1\overline{\xi}_1+\xi_2\overline{\xi}_2),\\
x^{123}&=\xi_0\overline{\xi}_0+\xi_{12}\overline{\xi}_{12}-\xi_1\overline{\xi}_1-\xi_2\overline{\xi}_2.
\end{aligned}\right\}\tag{29}$$

5° Наконец, имеем скаляр с составляющей

$$\xi_0\overline{\xi}_2-\xi_{12}\overline{\xi}_1-\xi_1\overline{\xi}_{12}+\xi_2\overline{\xi}_0.\tag{30}$$

IV. Уравнения Дирака

157. Ковариантный вектор $\frac{\partial}{\partial x}$. Рассмотрим в пространстве частного принципа относительности, отнесенном к системе координат x^1, x^2, x^3, x^4, функцию точки f; дифференциал df является скалярным инвариантом при каждом преобразовании Лоренца; но

$$df\equiv\frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial f}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial f}{\partial x^3}dx^3+\frac{\partial f}{\partial x^4}dx^4;$$

дифференциалы dx^i преобразуются как контравариантные составляющие вектора; следовательно, четыре оператора $\frac{\partial}{\partial x^i}$ можно рассматривать как ковариантные составляющие вектора; контравариантные составляющие этого вектора имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial x^4}.$$

Обозначим через $\frac{\partial}{\partial x}$ матрицу, соответствующую этому вектору:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x^1}+i\frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x^4} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x^3}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x^4} & -\frac{\partial}{\partial x^1}+i\frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^1}-i\frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x^4} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^3}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x^4} & -\frac{\partial}{\partial x^1}-i\frac{\partial}{\partial x^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь этой символикой, можно представить уравнения Дирака для электрона в электромагнитном поле в следующем виде. Вводим четыре волновых функции, которые являются составляющими спинора ξ, представляющего собой функцию точки (x); пусть V обозначает матрицу, соответствующую векторному потенциалу, K — матрицу, выведенную в п. 126:

$$K=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнения Дирака могут быть объединены в одном уравнении:

$$\left(\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{e}{c}V-m_0cK\right)\xi=0,$$

где буквы h, e, c, m_0 имеют хорошо известные из физики значения.

Выписывая каждое из четырех уравнений, имеем[1])

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{h}{i}\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}+i\frac{\partial\xi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial\xi_2}{\partial x^3}-\frac{1}{c}\frac{\partial\xi_2}{\partial x^4}\right)+\\
&+\frac{e}{c}\left[(V^1+iV^2)\xi_1+(V^3+cV^4)\xi_2\right]=-m_0c\xi_0,\\
&\frac{h}{i}\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x^3}+\frac{1}{c}\frac{\partial\xi_1}{\partial x^4}-\frac{\partial\xi_2}{\partial x^1}+i\frac{\partial\xi_2}{\partial x^2}\right)+\\
&+\frac{e}{c}\left[(V^3-cV^4)\xi_1-(V^1-iV^2)\xi_2\right]=-m_0c\xi_{12},\\
&\frac{h}{i}\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x^1}-i\frac{\partial\xi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial\xi_{12}}{\partial x^3}-\frac{1}{c}\frac{\partial\xi_{12}}{\partial x^4}\right)+\\
&+\frac{e}{c}\left[(V^1-iV^2)\xi_0+(V^3+cV^4)\xi_{12}\right]=m_0c\xi_1,\\
&\frac{h}{i}\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x^3}+\frac{1}{c}\frac{\partial\xi_0}{\partial x^4}-\frac{\partial\xi_{12}}{\partial x^1}-i\frac{\partial\xi_{12}}{\partial x^2}\right)+\\
&+\frac{e}{c}\left[(V^3-cV^4)\xi_0-(V^1+iV^2)\xi_{12}\right]=m_0c\xi_2.
\end{aligned}
\right\}\qquad (31)
$$

158. Дивергенция вектора тока. Нетрудно доказать, что если спинор ξ удовлетворяет уравнениям Дирака, то дивергенция вектора (26) равна нулю. Этот вектор в квантовой механике играет роль вектора тока. В самом деле, скалярное произведение произвольного вещественного вектора X на вектор тока равно вещественной величине $\xi^*JX\xi$. Дивергенция вектора тока равна сумме двух комплексно сопряженных величин, из которых одна получается дифференцированием составляющих ξ_α, другая — дифференцированием составляющих $\overline{\xi}_\alpha$. Первая величина есть не

---

[1]) См., например, B. L. van der Waerden, *Die gruppentheoretishe Methode in der Quantenmechanik*, 1932, стр. 97. (Ван-дер-Варден, Метод теории групп в квантовой механике, ОНТИ, Харьков, 1938, стр. 107); из уравнений (23.7) этой книги можно получить приводимые здесь формулы (31), заменяя ψ через $(\xi_1 - \xi_2)$ и $\dot{\psi}$ через (ξ_{12}, ξ_0). Для того, чтобы получить из принятых здесь обозначений обозначения Дирака, надо заменить ξ_0 через $\psi_2 - \psi_4$, ξ_1 через $\psi_1 + \psi_3$, ξ_2 через $-\psi_3 - \psi_4$ и ξ_{12} через $\psi_1 - \psi_2$.

что иное, как $\bar{\xi}^* J \frac{\partial}{\partial x} \xi$, которая на основании уравнений Дирака равна

$$-\frac{el}{ch} \bar{\xi}^* JV\xi + \frac{m_0 cl}{h} \bar{\xi}^* JK\xi;$$

но величина $\bar{\xi}^* JV\xi$ вещественная, поскольку вектор V вещественен; то же самое справедливо относительно величины $\bar{\xi}^* JK\xi$, которая равна скаляру (30):

$$\xi_0 \bar{\xi}_2 + \xi_2 \bar{\xi}_0 - \xi_1 \bar{\xi}_{12} - \xi_{12} \bar{\xi}_1;$$

следовательно, мы получаем для величины $\bar{\xi}^* J \frac{\partial}{\partial x} \xi$ чисто мнимое значение; искомая дивергенция, будучи суммой двух сопряженных чисто мнимых величин, равна, таким образом, нулю.

Уравнения Дирака инвариантны при каждом собственном преобразовании (вращении или отражении) группы Лоренца, так как при вещестаенной пространственной симметрии A обе матрицы с 1 столбцом и 4 строками $V\xi$ и $K\xi$ преобразуются одинаково, первая в $-A(V\xi)$, вторая в $KA\xi = -A(K\xi)$.

159. Примечание. В пространстве с нечетным числом измерений не существует систем уравнений, аналогичных уравнениям Дирака и инвариантных при движении и отражении: это зависит от того, что спинор $\frac{\partial}{\partial x} \xi$ (или $V\xi$) не эквивалентен спинору ξ относительно отражений. Но в пространстве с четным числом измерений уравнения Дирака обобщаются непосредственно.

ГЛАВА VIII

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

I. Линейные представления группы вращений Лоренца

160. Приведение к группе комплексных вращений пространства E_3. На основании теоремы п. 75 существует взаимно однозначное соответствие между неприводимыми линейными представлениями:

1° группы вращений вещественного эвклидова пространства 4 измерений;

2° группы вращений Лоренца (собственных вращений);

3° группы собственных вращений псевдоэвклидова пространства, фундаментальная форма которого приводима к сумме двух положительных квадратов и двух отрицательных.

В самом деле, эти три группы при переходе из вещественной области в комплексную дают одну и ту же группу, именно, группу комплексных вращений.

При применении первой группы полуспинор (ξ_1, ξ_2) преобразуется унитарной подстановкой, полуспинор (ξ_0, ξ_{12}) — другой подстановкой того же рода, но независимой от первой (п. 151).

При применении второй группы полуспинор (ξ_1, ξ_2) преобразуется линейной унимодулярной подстановкой s с комплексными коэффициентами, полуспинор $(\xi_0\ \xi_{12})$ — комплексно сопряженной подстановкой $\bar{s}$ (п. 152).

При применении третьей группы оба полуспинора преобразуются линейными унимодулярными вещественными подстановками, независимыми одна от другой.

Мы уже определили (пп. 82—84) линейные представления группы Лоренца, которая изоморфна группе комплексных вращений трехмерного пространства. *Мы получаем систему неприводимых неэквивалентных представлений, рассматривая представления $D_{\frac{p}{2}, \frac{q}{2}}$ с производящим полиномом*

$$(a\xi_1 + b\xi_2)^p (c\xi_0 + d\xi_{12})^q.$$

161. Частные случаи. При $p=q=1$ получаем тензор 4-го порядка, эквивалентный вектору; в самом деле, выражение $\xi^* C X \xi'$, где ξ есть полуспинор (ξ_1, ξ_2), ξ' — полуспинор (ξ_0, ξ_{12}), дает вектор с составляющими

$$x_1 = x^{1'} = \xi_1 \xi_{12}, \quad x_2 = x^{2'} = \xi_2 \xi_{12}, \quad x_{1'} = x^1 = \xi_2 \xi_0,$$
$$x_{2'} = x^2 = -\xi_1 \xi_0.$$

Производящий полином этого вектора может быть написан в следующем виде:

$$F_{1,1} \equiv (a\xi_1 + b\xi_2)(c\xi_0 + d\xi_{12}) \sim bcx^1 - acx^2 + \\ + adx^{1'} + bdx^{2'}.$$

Если $p > q$, то можно заменить производящую форму представления $D_{\frac{p}{2}, \frac{q}{2}}$ формой

$$F_{p,q} \sim (bcx^1 - acx^2 + abx^{1'} + bdx^{2'})^q (a\xi_1 + b\xi_2)^{p-q}.$$

При $p=q$ получаем тензор порядка $(p+1)^2$, причем составляющие являются однородными полиномами порядка p от x^1, x^2, $x^{1'}$, $x^{2'}$, удовлетворяющими уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^1 \partial x^{1'}} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2 \partial x^{2'}} = 0;$$

это — *гармонические полиномы* p-го порядка; доказательство — непосредственное.

При $p=2$, $q=0$ тензор имеет составляющие ξ_1^2, $\xi_1\xi_2$, ξ_2^2; он эквивалентен полубивектору второго рода, и за производящий полином можно принять

$$F_{2,0} \sim a^2 x_{12'} - ab(x_{11'} - x_{22'}) + b^2 x_{1'2};$$

аналогично имеем

$$F_{0,2} \sim c^2 x_{1'2'} + cd(x_{11'} + x_{22'}) + d^2 x_{12}.$$

Если p и q одинаковой четности, то можно за производящую форму для представления $D_{\frac{p}{2}, \frac{q}{2}}$ взять форму, в которую входят только векторы и полубивекторы.

II. Представления группы вращений и отражений Лоренца

162. Две категории неприводимых представлений. Группа вращений и отражений вещественного эвклидова пространства 4 измерений, группа собственных вращений и отражений пространства частного принципа относительности, наконец, группа собственных вращений и отражений псевдоэвклидова пространства, фундаментальная форма которого приводима к сумме двух положительных и двух отрицательных квадратов, имеют одинаковые линейные представления.

В любом из этих случаев симметрия $H_2 + H'_2$ преобразует ξ_0 в ξ_3 и ξ_3 в ξ_0, то есть составляющую $\xi_0^p\xi_0^q$ неприводимого тензора $D_{\frac{p}{2},\frac{q}{2}}$ в составляющую $\xi_0^q\,\xi_2^p$ тензора $D_{\frac{q}{2},\frac{p}{2}}$. Применение теорем пп. 88, 89 приводит нас к следующему предложению:

Теорема. *Неприводимые представления группы вращений и отражений (собственных) вещественного эвклидова пространства 4 измерений распадаются на две категории:*

1° *представления, индуцирующие в группе вращений линейное неприводимое представление вида* $D_{\frac{p}{2},\frac{p}{2}}$; *каждому целому числу p соответствуют два неэквивалентных линейных представления полной группы;*

2° *представления, индуцирующие в группе вращений приводимое линейное представление; это последнее разлагается на два неприводимых неэквивалентных представления* $D_{\frac{p}{2},\frac{q}{2}}$ *и* $D_{\frac{q}{2},\frac{p}{2}}$ $(p \neq q)$. *Каждой паре* (p, q) *различных целых чисел соответствует единственное неприводимое представление полной группы.*

Обозначим через $D^+_{\frac{p}{2},\frac{p}{2}}$ тензор, составляющие которого преобразуются как составляющие тензора производящей формы

$$(a\xi_1 + b\xi_2)^p(c\xi_0 + d\xi_{12})^p,$$

через $D^-_{\left(\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right)}$ — тензор, у которого составляющие преобразуются так же, но с изменением знака при каждом отражении.

При $p=1$ $\overset{+}{D}_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$ определяет вектор, следовательно, $\overset{-}{D}_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$ — тривектор.

Через $D_{\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right)}$ $(p\neq q)$ будем обозначать тензор производящей формы

$$(a\xi_1+b\xi_2)^p(c\xi_0+d\xi_{12})^q+(a\xi_1+b\xi_2)^q(c\xi_0+d\xi_{12})^p.$$

163. Разложение произведения $\overset{+}{D}_{\left(\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right)}\times\overset{+}{D}_{\left(\frac{p'}{2},\frac{p'}{2}\right)}$.

Составляющие этих двух тензоров задаются производящими полиномами:

$$(a\xi_1+b\xi_2)^p(c\xi_0+d\xi_{12})^p,$$
$$(a\xi'_1+b\xi'_2)^{p'}(c\xi'_0+d\xi'_{12})^{p'}.$$

Составим полиномы

$$P_{i,j}=(\xi_1\xi'_2-\xi_2\xi'_1)^i(\xi_0\xi'_{12}-\xi_{12}\xi'_0)^j(a\xi_1+b\xi_2)^{p-i}\times$$
$$\times(a\xi'_1+b\xi'_2)^{p'-i}(c\xi_0+d\xi_{12})^{p-j}(c\xi'_0+d\xi'_{12})^{p'-j}$$
$$(0\leqslant i\leqslant p';\quad 0\leqslant j\leqslant p';\quad p\geqslant p').$$

Коэффициенты различных одночленов, составленных из a, b, c, d, дают $(p+p'-2i+1)(p+p'-2j+1)$ линейных комбинаций составляющих тензора-произведения. Сумма всех этих чисел равна квадрату суммы величин $p+p'-2i+1$ $(i=0,1,2,\ldots,p')$; она равна, таким образом, $(p+1)^2\times(p'+1)^2$. Но это последнее число как раз равно порядку рассматриваемого тензора, разложение которого мы ищем. Каждый из полиномов $P_{i,j}$ определяет неприводимый тензор группы вращений, именно, тензор $D_{\frac{p+p'}{2}-i,\ \frac{p+p'}{2}-j}$. Таким образом, имеем искомое разложение

$$\overset{+}{D}_{\left(\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right)}\times\overset{+}{D}_{\left(\frac{p'}{2},\frac{p'}{2}\right)}=\sum D_{\left(\frac{p+p'}{2}-i,\ \frac{p+p'}{2}-j\right)}+$$
$$+\sum\overset{+}{D}_{\left(\frac{p+p'}{2}-i,\ \frac{p+p'}{2}-i\right)}.$$

где первая сумма распространяется на все пары целых чисел i, j, причем $0 \leqslant i < j \leqslant p' \leqslant p$, вторая — на все целые числа i, удовлетворяющие неравенствам $0 \leqslant i \leqslant p' \leqslant p$.

Тензоры второй суммы суть вида D^+, так как

$$P_{i,i} = (\xi_1\xi_2' - \xi_2\xi_1')^i (\xi_0\xi_{12}' - \xi_{12}\xi_0')^i \times \\ \times (a\xi_1 + b\xi_2)^{p-i} (a\xi_1' + b\xi_2')^{p-i} \times \\ \times (c\xi_0 + d\xi_{12})^{p'-i} (c\xi_0' + d\xi_{12}')^{p'-i};$$

при отражении величины $\xi_1\xi_2' - \xi_2\xi_1'$ и $\xi_0\xi_{12}' - \xi_{12}\xi_0'$ преобразуются одна в другую с изменением знака, так что полином $P_{i,i}$ эквивалентен производящему полиному тензора

$$\overset{+}{D}\left(\frac{p+p'}{2}-i,\ \frac{p+p'}{2}-i\right).$$

Если бы оба множителя левой части были D^-, то результат разложения был бы тот же самый. Если бы только один из множителей был D^-, то все члены во второй сумме правой части были бы D^-.

Например,

$$\overset{-}{D}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \times \overset{-}{D}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = D^+_{(1,1)} + D_{(1,0)} + D^+_{(0,0)};$$

произведение двух тривекторов разлагается на скаляр (скалярное произведение), бивектор и тензор, эквивалентный совокупности гармонических полиномов второго порядка.

164. Разложение произведения $\overset{+}{D}\left(\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right) \times \overset{+}{D}\left(\frac{p'}{2},\frac{q'}{2}\right)$ $(p' \neq q')$. Разложение производится аналогично. Тензоры

$$D\left(\frac{p+p'}{2}-i,\ \frac{p+q'}{2}-j\right)$$

дают все неприводимые части искомого произведения, если i и j придавать независимо друг от друга значения

$$(0 \leqslant i \leqslant p,\quad 0 \leqslant i \leqslant p') \text{ и } (0 \leqslant j \leqslant p,\quad 0 \leqslant j \leqslant q');$$

но если $\frac{p+p'}{2}-i=\frac{p+q'}{2}-j$, то этот тензор надо учесть два раза, приписывая ему в одном случае верхний знак $+$, в другом — верхний знак $-$.

Например, при перемножении тривектора и спинора ($p=1$, $p'=1$, $q'=0$) следует положить $i=0$ и 1, $j=0$, что дает $D_{\left(1,\frac{1}{2}\right)}$ и $D_{\left(0,\frac{1}{2}\right)}$. Мы получим эквивалентное разложение, исходя из произведения вектора и спинора. Вообще *два произведения*:

$$\overset{+}{D}_{\left(\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right)}\times D_{\left(\frac{p'}{2},\frac{q'}{2}\right)} \quad \text{и} \quad \overset{-}{D}_{\left(\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right)}\times D_{\left(\frac{p'}{2},\frac{q'}{2}\right)}$$

эквивалентны ($p'\neq q'$), хотя в этих произведениях, имеющих одинаковую вторую часть, первые множители *не эквивалентны*.

В рассматриваемом примере часть $D_{\left(1,\frac{1}{2}\right)}$ разложения имеет в качестве производящего полинома

$$(-acx_{2'}+bcx_{1'}+adx_1+bdx_2)\,(a\xi_1+b\xi_2+c\xi_0+d\xi_{12}).$$

Если вектор x заменить на $\frac{\partial}{\partial x}$, то получим неприводимый тензор

$$\left(-ac\frac{\partial}{\partial x^{2'}}+bc\frac{\partial}{\partial x^{1'}}+ad\frac{\partial}{\partial x^1}+bd\frac{\partial}{\partial x^2}\right)\times$$
$$\times\,(a\xi_1+b\xi_2+c\xi_0+d\xi_{12}).$$

Составляющие этого тензора образуют одну из неприводимых частей производной спинорного поля. Спинорные поля, обращающие в нуль этот тензор, определяются формулами

$$\xi_1=\alpha x^{1'}+\beta x^2+\gamma,\qquad \xi_2=\alpha x^{2'}-\beta x^1+\delta,$$
$$\xi_0=\alpha' x^1+\beta' x^2+\gamma',\quad \xi_{12}=\alpha' x^{2'}-\beta' x^{1'}+\delta',$$

где α, β, γ, δ, α', β', γ', δ' — произвольные постоянные. Любое движение и отражение преобразует такое спинорное поле в поле того же вида.

165. Разложение произведения $D\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right) \times D\left(\frac{p'}{2}, \frac{q'}{2}\right) (p' \neq q')$.

Аналогичное рассуждение приводит к разложению

$$D\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right) \times D\left(\frac{p'}{2}, \frac{q'}{2}\right) = \sum D\left(\frac{p+p'}{2} - i, \frac{q+q'}{2} - j\right) + \\ + \sum D\left(\frac{p+q'}{2} - k, \frac{q+p'}{2} - h\right),$$

где суммы распространяются на все значения i, j, k, h, удовлетворяющие неравенствам

$$0 \leqslant i \leqslant p, \quad 0 \leqslant i \leqslant p'; \quad 0 \leqslant j \leqslant q, \\ 0 \leqslant j \leqslant q'; \quad 0 \leqslant k \leqslant p, \quad 0 \leqslant k \leqslant q'; \\ 0 \leqslant h \leqslant q, \quad 0 \leqslant h \leqslant p'.$$

Если

$$\frac{p+p'}{2} - i = \frac{q+q'}{2} - j \quad \text{или} \quad \frac{p+q'}{2} - k = \frac{q+p'}{2} - h,$$

надо соответствующий символ D заменить на $D^{+} + D^{-}$.

Например, для произведения двух спиноров

$$D\left(\frac{1}{2}, 0\right) \times D\left(\frac{1}{2}, 0\right) = D_{(1,0)} + \overset{+}{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \overset{-}{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \\ + D^{+}_{(0,0)} + D^{-}_{(0,0)}$$

разложение дает бивектор, вектор, тривектор, скаляр и 4-вектор, что согласуется с тем, что было получено непосредственно. В частности, вектор и тривектор даются производящими полиномами

$$(a\xi_1 + b\xi_2)(c\xi'_0 + d\xi'_{12}) + (c\xi_0 + d\xi_{12})(a\xi'_1 + b\xi'_2), \\ (a\xi_1 + b\xi_2)(c\xi'_0 + d\xi'_{12}) - (c\xi_0 + d\xi_{12})(a\xi'_1 + b\xi'_2),$$

из которых первый эквивалентен полиному $(a\xi_1 + b\xi_2)(c\xi_0 + d\xi_{12})$.

III. Линейные представления группы вращений вещественного эвклидова пространства E_n

166. Э. Картан определил все неприводимые линейные представления группы вращений вещественного эвклидова пространства n измерений[1]). С другой стороны, на основании исследований Г. Вейля (п. 81, примечание 3) мы знаем, что теорема о полной приводимости имеет место для всех линейных представлений этой группы. Эти результаты распространяются непосредственно на группу собственных вращений вещественных псевдоэвклидовых пространств. Метод, примененный в пп. 82—84, позволяет получить отсюда все представления группы комплексных вращений.

Следует различать случаи нечетного и четного n.

167. **Случай пространства** $E_{2\nu+1}$. За фундаментальную форму примем

$$(x^0)^2+x^1x^{1'}+x^2x^{2'}+\ldots+x^\nu x^{\nu'}.$$

Каждое неприводимое линейное представление группы вращений (собственных) получается при помощи выражения

$$\xi_0^p\,(x^1)^{p_1}(x^{12})^{p_2}\ldots(x^{12\cdots\nu-1})^{p_{\nu-1}},$$

если к нему применять различные вращения группы. Показатели $p, p_1, \ldots, p_{\nu-1}$ являются произвольными целыми числами, положительными или равными нулю. Например, представление $(p=2,\quad p_1=p_2=\ldots=p_{\nu-1}=0)$ дает ν-вектор; в самом деле, ν-вектор, соответствующий спинору ξ и определяемый выражением $\xi^*C\underset{(\nu)}{X}\xi$, содержит составляющую $x_{1'2'\ldots\nu'}=\pm\xi_0^2$; следовательно, применяя к ξ_0^2 различные вращения, мы получим

---

[1]) См. E. Cartan, *Les groupes projectifs, qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane* (Bull. Soc. Math. France, 41, 1913, стр. 53—96). Совершенно отличный метод принадлежит R. Brauer'у: *Über die Darstellung der Drehungsgruppe durch Gruppen linearer Substitutionen* (Inaugural — Dissertation, Göttingen, 1925). Относительно группы комплексных вращений см. также R. Brauer, *Die stetigen Darstellungen der komplexen Orthogonalgruppe* (Sitzungsb. Akad. Berlin, 1929, стр. 3—15).

неприводимый тензор, эквивалентный тому, который получается при применении к составляющей $x^{12\cdots\nu}$ ν-вектора различных вращений, а в этом последнем случае мы получаем ν-вектор.

168. Случай пространства $E_{2\nu}$. Возьмем фундаментальную форму в виде

$$x^1x^{1'}+x^2x^{2'}+\ldots+x^{\nu}x^{\nu'}.$$

Каждое неприводимое линейное представление группы вращений получается при помощи выражения

$$\xi_0^p\,\xi_\nu^{p_1}(x^1)^{p_2}(x^{12})^{p_3}\ldots(x^{12\cdots\nu-2})^{p_{\nu-1}},$$

если к нему применять различные вращения группы.

При $p=1$, $p_1=p_2=\ldots=p_{\nu-1}=0$ получаем полуспинор с четным числом индексов; при $p=0$, полуспинор с нечетным $p_1=1$,

$$p_2=\ldots=p_{\nu-1}=0$$

числом индексов. Тензоры $(p=2, p_1=p_2=\ldots p_{\nu-1}=0)$ и $(p=0,\ p_1=2,\ p_2=\ldots.p_{\nu-1}=0)$ являются полу-ν-векторами первого и второго рода; тензор $(p=p_1=1, p_2=\ldots=p_{\nu-1}=0)$ является $(\nu-1)$-вектором. Чтобы доказать последнее свойство, достаточно заметить, что выражение

$$\varphi^*C\underset{(\nu-1)}{X}\psi$$

дает $(\nu-1)$-вектор, соответствующий двум полуспинорам φ и ψ, и для этого $(\nu-1)$-вектора имеем

$$x_{1'2'\ldots(\nu-1)'}=\pm\xi_0\xi_\nu;$$

тензор, получаемый при изменении различных вращений к произведению $\xi_0\xi_1$, эквивалентен, таким образом, тензору, который получается при применении различных вращений к $x^{12\cdots\nu-1}$, то есть $(\nu-1)$-вектору.

169. Неприводимые линейные представления группы вращений и отражений. В пространстве $E_{2\nu+1}$ каждое отражение оставляет инвариантным каждый из ν основных неприводимых тензоров, определяемых составляющими ξ_0, x^1, x^{12}, ..., $x^{12\cdots\nu-1}$; следовательно, если задано какое-нибудь линейное представление группы вращений и отражений, индуцирующее для группы вращений неприводимое представление, то каждое отражение преобразует одну из неприводимых частей в другую эквивалентную. Таким образом (п. 88),

Каждое неприводимое представление группы вращений и отражений (собственных) пространства $E_{2\nu+1}$ индуцирует в группе вращений неприводимое представление; обратно, каждому неприводимому представлению группы вращений соответствует два неприводимых неэквивалентных представления группы вращений и отражений.

В случае пространства $E_{2\nu}$ любое отражение оставляет инвариантным каждый из неприводимых тензоров, определяемых $x^1, x^{12}, \ldots, x^{12\ldots\nu-2}$, но преобразует полуспинор в полуспинор другого рода. Таким образом,

Для группы вращений и отражений (собственных) пространства $E_{2\nu}$ существует два рода неприводимых линейных представлений:

1° *каждый неприводимый тензор, для которого $p = p_1$, дает два неприводимых неэквивалентных представления группы вращений и отражений;*

2° *совокупность составляющих двух тензоров $(p, p_1, p_2, \ldots, p_{\nu-1})$ и $(p_1, p, p_2, \ldots, p_{\nu-1})$ при $p \neq p_1$ дает одно и только одно неприводимое представление группы вращений и отражений.*

Отметим, что тензоры первой категории, или вернее, половина этих тензоров, получаются при применении различных вращений к выражению

$$(x^1)^{p_1}(x^{12})^{p_2}\ldots(x^{12\ldots\nu-1})^{p_{\nu-1}},$$

так как выражение $\xi_0\xi_\nu$ задает $(\nu-1)$-вектор. Как пример неприводимого тензора второй категории достаточно привести спинор.

Следует отметить существенное различие между пространствами с четным и нечетным числом измерений.

170. Частный случай $n=8$. В случае $n=8$ тремя первыми основными неприводимыми представлениями группы вращений (собственных) являются полуспинор первого рода, полуспинор второго рода и вектор. Мы показали в п. 139, что к группе вращений можно присоединить пять других семейств преобразований таким образом, что преобразования из каждого семейства производят над тремя рассматриваемыми тензорами одну и ту же перестановку, причем эта перестановка меняется от одного семейства к другому. Составляющие неприводимых тензоров полной группы, составленной из шести указанных семейств, получаются тогда присоединением к составляющим тензора (p, p_1, p_2, p_3) составляющих тензоров, получающихся при помощи применения любой перестановки к трем первым показателям p, p_1, p_2. Отметим, что четвертый основной тензор, именно бивектор, инвариантен при каждом преобразовании полной группы. Нетрудно проверить, например, что тензор $\xi_\alpha \xi'_\beta - \xi_\beta \xi'_\alpha$, где ξ_α и ξ'_α — составляющие двух полуспиноров одного и того же рода, эквивалентен бивектору, так как в бивекторе, определяемом выражением $\underset{(2)}{\varphi^* C X \varphi}$, составляющая $x_{1'2}$ равна $-\xi_0\xi'_{34} + \xi_{34}\xi'_0$; применение различных вращений к выражению $\xi_0\xi'_{34} - \xi_{34}\xi'_0$ дает, таким образом, тензор, эквивалентный бивектору.

171. Примечание. Метод Г. Вейля для определения неприводимых линейных представлений замкнутых групп[1]) позволяет легко найти порядок различных указанных выше неприводимых линейных представлений. Приведем один пример, относящийся к пространству E_8. Порядок неприводимого представления (p, p_1, p_2, p_3) равен

$$\frac{F(p+1, p_1+1, p_2+1, p_3+1)}{F(1, 1, 1, 1)},$$

где

$$\begin{aligned} F(x, x_1, x_2, x_3) = x x_1 x_2 x_3 (x + x_3)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) \times \\ \times (x + x_1 + x_3)(x + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3) \times \\ \times (x + x_1 + x_2 + x_3)(x + x_1 + x_2 + 2x_3). \end{aligned}$$

Например, порядок представления (1, 1, 1, 0) равен 350.

---

[1]) H. Weyl, *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen* (Math. Zeitschr., 23, 1925, стр. 271—309; 24, 1925, стр. 328—395). (Русский перевод в Успехах Математических Наук, т. 4. *ред.*)

ГЛАВА IX

СПИНОРЫ И УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

I. Спинорные поля в эвклидовой геометрии

172. Бесконечно малые вращения в применении к спинорам. В п. 19 было показано, что каждое бесконечно малое вращение эвклидова пространства E_n определяется тензором, эквивалентным бивектору. Мы сейчас снова получим этот результат другим методом, который в то же время даст бесконечно малое вращение спиноров.

Сначала рассмотрим *простое* вращение на угол α, получающееся в результате применения двух симметрий, соответствующих двум единичным векторам, образующим между собой угол $\frac{\alpha}{2}$. Обозначим через A_1 первый из этих единичных векторов, через A_2 — единичный вектор, перпендикулярный к первому и лежащий в 2-плоскости простого вращения; тогда рассматриваемое вращение определится матрицей

$$\left(A_1 \cos\frac{\alpha}{2} + A_2 \sin\frac{\alpha}{2}\right) A_1 = \cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} A_1 A_2.$$

Если мы предположим, что угол α — бесконечно малый, то главная часть этой матрицы равна $1 - \frac{1}{2}\alpha A_1 A_2$.

Применяя ее к вектору X, получим

$$X' = \left(1 - \frac{1}{2}\alpha A_1 A_2\right) X \left(1 + \frac{1}{2}\alpha A_1 A_2\right) =$$

$$= X + \frac{1}{2}\alpha (X A_1 A_2 - A_1 A_2 X);$$

применяя к спинору ξ, имеем

$$\xi' = \left(1 - \frac{1}{2}\alpha A_1 A_2\right)\xi.$$

Следовательно, обозначив через U матрицу, соответствующую бивектору aA_1A_2, имеем бесконечно малое преобразование:

$$\delta X = \frac{1}{2}(XU - UX), \tag{1}$$

$$\delta\xi = -\frac{1}{2}U\xi. \tag{2}$$

Если мы отнесем, например, пространство к n векторам базиса $A_1, A_2, \ldots, A_n$, причем

$$\frac{1}{2}(A_iA_j + A_jA_i) = g_{ij},$$

то бесконечно малое вращение, определяемое символом

$$U = \frac{1}{2}a^{ij}A_iA_j \quad (a^{ij} = -a^{ji}),$$

даст в применении к вектору x^kA_k

$$\delta x^kA_k = \frac{1}{4}a^{ij}x^k(A_kA_iA_j - A_iA_jA_k) =$$
$$= \frac{1}{8}a^{ij}x^k[A_k(A_iA_j - A_jA_i) - (A_iA_j - A_jA_i)A_k].$$

Величина, стоящая в квадратных скобках, равна

$$-A_i(A_jA_k + A_kA_j) + A_j(A_iA_k + A_kA_i) - (A_jA_k + A_kA_j)A_i +$$
$$+ (A_iA_k + A_kA_i)A_j = -4(g_{jk}A_i - g_{ik}A_j).$$

Таким образом, имеем

$$\delta x^kA_k = -\frac{1}{2}a^{ij}x^k(g_{jk}A_i - g_{ik}A_j) = a^{ij}g_{ik}x^kA_j = a^j_k x^kA_j,$$

откуда

$$\delta x^i = a^i_k x^k, \quad \text{или} \quad \delta x^i = a^{ki}x_k, \quad \text{или} \quad \delta x_i = a_{ki}x^k. \tag{3}$$

Формула (2) дает

$$\delta\xi = -\frac{1}{4}a^{ij}A_iA_j\xi. \tag{2'}$$

Например, для $n = 3$, сохраняя обозначения главы III, можно положить

$$U = i(\alpha H_1 + \beta H_2 + \gamma H_3),$$

$$\delta\xi = -\frac{1}{2}i(\alpha H_1 + \beta H_2 + \gamma H_3)\,\xi,$$

откуда, учитывая выражения для матриц H_l (п. 55), имеем

$$\left.\begin{aligned}\delta\xi_0 &= -\frac{1}{2}i\gamma\xi_0 - \frac{1}{2}i(\alpha - \beta i)\xi_1,\\ \delta\xi_1 &= -\frac{1}{2}i(\alpha + \beta i)\xi_0 + \frac{1}{2}i\gamma\xi_1;\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

учитывая введенные выше общие обозначения, имеем для коэффициентов α, β, γ следующие значения:

$$\alpha = a_{23}, \quad \beta = a_{31}, \quad \gamma = a_{12}.$$

173. Другая интерпретация. Полученные результаты можно интерпретировать иначе. Рассмотрим составляющие *фиксированного* вектора и *фиксированного* спинора, отнесенные последовательно к двум декартовым реперам (R) и (R'), из которых новый (R') получается из старого (R) при помощи заданного бесконечно малого вращения. Если мы будем отмечать штрихом составляющие вектора или спинора в новом репере, то вектор или спинор, имеющий эти новые составляющие в старом репере, получается из данного вектора или спинора при помощи бесконечно малого вращения, обратного данному. Таким образом, имеем теорему:

Теорема. *Если задан вектор X или спинор ξ, отнесенный к реперам (R) и (R'), причем (R') получается из (R) при помощи бесконечно малого вращения U, то бесконечно малые приращения составляющих этого вектора или спинора определяются формулами*

$$\delta X = \frac{1}{2}(UX - XU), \tag{5}$$

$$\delta\xi = \frac{1}{2}U\xi. \tag{6}$$

Первая из них может быть записана также в виде:

$$\delta x^i = -a^i_k x^k, \text{ или } \delta x^i = a^{ik}x^k, \text{ или } \delta x_i = a_{ik}x^k. \tag{7}$$

В частности, формулы (4) дают

$$\delta\xi_0 = \frac{1}{2}i\gamma\xi_0 + \frac{1}{2}i(\alpha - \beta i)\xi_1,$$

$$\delta\xi_1 = \frac{1}{2}i(\alpha + \beta i)\xi_0 - \frac{1}{2}i\gamma\xi_1.$$

174. Абсолютное дифференцирование вектора и спинора. Рассмотрим в пространстве векторное или спинорное поле, причем каждый вектор (или спинор) отнесен некоторой точке пространства. Представим, что каждой точке пространства отнесена декартова координатная система, *относительно которой фундаментальная форма сохраняет одни и те же коэффициенты* (то есть координатные реперы в различных точках равны в смысле эвклидовой геометрии).

Обозначим через Ω бивектор, определяющий бесконечно малое вращение, которое переводит репер (R) с началом M в положение, параллельное реперу (R'), имеющему начало в бесконечно близкой точке M'; обозначим составляющие этого бивектора через ω^{ij}. Пусть x^i — составляющие вектора поля относительно (R) с началом в M, $x^i + dx^i$ — составляющие вектора поля, отнесенные к (R') с началом в M'. Чтобы получить из первого вектора второй, можно сначала перейти от первого к вектору с началом M', имеющему относительно (R') те же составляющие x^i при помощи вращения Ω, переводящего (R) в (R'); затем перейти ко второму вектору, складывая x^i и dx^i.

Элементарное геометрическое приращение Dx^i, получаемое вектором поля, определяется согласно (3) формулами

$$Dx^i = dx^i + \omega^i_k x^k \quad \text{или} \quad DX = dX + \frac{1}{2}(X\Omega - \Omega X); \tag{8}$$

для поля спиноров имеем аналогично

$$D\xi = d\xi - \frac{1}{2}\Omega\xi. \tag{9}$$

dX (или $d\xi$) обозначает *относительное приращение*, $\frac{1}{2}(X\Omega - \Omega X)$ $\left(\text{или } -\frac{1}{2}\Omega\xi\right)$ — *переносное приращение*. DX и $D\xi$ являются *абсолютными дифференциалами* вектора и спинора.

175. Уравнения Дирака. Предположим, что пространственно-временной континуум частного принципа относительности отнесен к галилеевым реперам, имеющим начала в различных точках пространства; пусть

$$(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 - c^2 (\omega^4)^2$$

— скалярный квадрат вектора, соединяющего точку M с бесконечно близкой точкой M'; ω^1, ω^2, ω^3, ω^4 — контравариантные составляющие вектора $\overrightarrow{MM'}$. Матрица Ω, определяющая бесконечно малое вращение, которое переводит репер (R) с началом в точке M в положение, параллельное реперу (R'), имеющему начало в точке M', имеет вид (п. 149)

$$\Omega = \begin{pmatrix} \text{II} & 0 \\ 0 & \Pi \end{pmatrix},$$

причем II есть матрица

$$\begin{pmatrix} -i(\omega^{12} - ic\omega^{34}) & -(\omega^{31} - ic\omega^{24}) + i(\omega^{23} - ic\omega^{14}) \\ \omega^{31} - ic\omega^{24} + i(\omega^{23} - ic\omega^{14}) & i(\omega^{12} - ic\omega^{34}) \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Положим

$$df = d_1 f\omega^1 + d_2 f\omega^2 + d_3 f\omega^3 + d_4 f\omega^4,$$

где f — функция точки; если пространство отнести к реперу (R), вектор $\frac{\partial}{\partial x}$ (п. 157) должен быть заменен следующим:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & D_1 + iD_2 & D_3 - \frac{1}{c} D_4 \\ 0 & 0 & D_3 + \frac{1}{c} D_4 & -D_1 + iD_2 \\ D_1 - iD_2 & D_3 - \frac{1}{c} D_4 & 0 & 0 \\ D_3 + \frac{1}{c} D_4 & -D_1 - iD_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

причем символы D_i имеют следующее значение: полагаем

$$Df = D_1 f\omega^1 + D_2 f\omega^2 + D_3 f\omega^3 + D_4 f\omega^4; \qquad (12)$$

имеем

$$\left.\begin{aligned}
D\xi_0 &= d\xi_0 + \frac{1}{2}\left(i\omega_{12} - \frac{1}{c}\,\omega_{34}\right)\xi_0 + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\omega_{31} + \frac{i}{c}\,\omega_{24} - i\omega_{23} + \frac{1}{c}\,\omega_{14}\right)\xi_{12}, \\
D\xi_{12} &= d\xi_{12} - \frac{1}{2}\left(\omega_{31} + \frac{i}{c}\,\omega_{24} + i\omega_{23} - \frac{1}{c}\,\omega_{14}\right)\xi_0 - \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(i\omega_{12} - \frac{1}{c}\,\omega_{34}\right)\xi_{12}, \\
D\xi_1 &= d\xi_1 - \frac{1}{2}\left(i\omega_{12} + \frac{1}{c}\,\omega_{34}\right)\xi_1 + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\omega_{31} - \frac{i}{c}\,\omega_{24} + i\omega_{23} + \frac{1}{c}\,\omega_{14}\right)\xi_2, \\
D\xi_2 &= d\xi_2 - \frac{1}{2}\left(\omega_{31} - \frac{i}{c}\,\omega_{24} - i\omega_{23} - \frac{1}{c}\,\omega_{14}\right)\xi_1 + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(i\omega_{12} + \frac{1}{c}\,\omega_{34}\right)\xi_2.
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

В уравнениях (13) мы ввели ковариантные составляющие ω_{ij}, связанные с контравариантными соотношениями:

$$\omega_{23} = \omega^{23}, \qquad \omega_{31} = \omega^{31}, \qquad \omega_{12} = \omega^{12},$$
$$\omega_{14} = -c^2\omega^{14}, \quad \omega_{24} = -c^2\omega^{24}, \quad \omega_{34} = -c^2\omega^{34}.$$

Уравнения Дирака выражаются следующим матричным соотношением:

$$\left(\frac{h}{i}\,D + \frac{e}{c}\,V - m_0cK\right)\xi = 0, \qquad (14)$$

причем матрица K, как и в п. 157, имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где каждый элемент обозначает матрицу второго порядка.

II. Спинорные поля в римановой геометрии

176. Случай общего принципа относительности. В предыдущих формулах ничего не надо изменять при условии, что мы будем относить каждой точке пространственно-временного континуума локальный галилеев репер, дающий фундаментальную форму вида

$$(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+(\omega^3)^2-c^2(\omega^4)^2,$$

а за формы ω_{ij} будем принимать те, которые определяют аффинную связность пространственно-временного континуума[1]).

В качестве примера рассмотрим фундаментальную форму ds Шварцшильда (изменив у нее знак); ей соответствуют формы

$$\omega^1=rd\vartheta,\quad \omega^2=r\sin\vartheta d\varphi,\quad \omega^3=\frac{dr}{\sqrt{1-\frac{2m}{r}}},$$

$$\omega^4=\sqrt{1-\frac{2m}{r}}\,dt.$$

Единственные не равные нулю формы ω_{ij} следующие:

$$\omega_{12}=\cos\vartheta\,d\varphi,\qquad \omega_{31}=\sqrt{1-\frac{2m}{r}}\,d\vartheta,$$

$$\omega_{32}=\sqrt{1-\frac{2m}{r}}\sin\vartheta d\varphi,\quad \omega_{34}=-\frac{c^2m}{r^2}\,dt.$$

Матрица D имеет вид $\begin{pmatrix}0 & \Delta\\ \bar\Delta & 0\end{pmatrix}$, где Δ и $\bar\Delta$ — комплексно сопряженные матрицы, причем

$$\Delta=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}, \tag{15}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}&=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}+\frac{i}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{1}{2}\frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{r},\\
a_{12}&=\sqrt{1-\frac{2m}{r}}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{c\sqrt{1-\frac{2m}{r}}}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{2r-3m}{2r^2\sqrt{1-\frac{2m}{r}}},\\
a_{21}&=\sqrt{1-\frac{2m}{r}}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{c\sqrt{1-\frac{2m}{r}}}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{2r-3m}{2r^2\sqrt{1-\frac{2m}{r}}},\\
a_{22}&=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}+\frac{i}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{1}{2}\frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{r};
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$\bar\Delta$ получается из Δ изменением всюду i на $-i$.

---

[1]) Данное в п. 158 доказательство теоремы, согласно которой дивергенция вектора тока равна нулю, может быть повторено здесь без всякого изменения.

177. Случай любых декартовых реперов. Выше мы предполагали, что риманово пространство отнесено к семейству реперов частного вида: необходимо, чтобы они были конгруэнтны между собой с метрической точки зрения. Этой точкой зрения пользовались некоторые из авторов, пытавшихся обобщить уравнения Дирака на общий принцип относительности[1]).

Но для этих авторов спинор не является вполне определенным геометрическим объектом; В. Фок выводит закон преобразования спинора при вращении из закона преобразования вектора, определяемого этим спинором и его сопряженным, а это вводит некоторую неопределенность, которую он рассматривает как основу электромагнитного поля. Другие физики отказываются от употребления локальных галилеевых реперов и ищут обобщение уравнений Дирака, пользуясь классической техникой исследования в римановой геометрии[2]), техникой, основанной на употреблении декартовых реперов, связанных с выбором координатной системы; эти реперы могут иметь произвольную форму с метрической точки зрения. Если с этой точки зрения мы будем продолжать рассматривать спинор как вполне определенный геометрический объект, имеющий природу тензора в наиболее общем смысле этого слова, мы убедимся, что обобщение уравнений Дирака становится невозможным[3]).

Поставленный вопрос приводится к выяснению, — имеет ли спинор тензорный характер относительно группы всех линейных подстановок с n переменными. В действительности вопрос носит несколько более общий характер, так как некоторые эвклидовы

---

[1]) См., главным образом, V. Fock, *Geometrisierung der Diracschen Theorie des Elektrons* (Zeitschr. f. Physik, 75, стр. 261—277), а также H. Weyl, *Electron und Gravitation* (Zeitschr. f. Physik, 56, 1929, стр. 330—352); Вейль стоит на иной точке зрения.

[2]) См., например, E. Schrödinger, *Diracsches Electron in Schwerfeld* (Sitzungsb. Akad. Berlin, 1932, стр. 105).

[3]) Некоторые физики рассматривают спинор как объект, в некотором роде индифферентный по отношению к вращениям, воздействующим на классические геометрические объекты (векторы и т. д.), и у которого составляющие в заданной системе отсчета могут подвергаться линейным преобразованиям, в некотором роде автономным. См., например, L. Infeld, B. L. van der Waerden, *Die Wellengleichungen des Elektrons in der allgemeinen Relativitätstheorie* (Sitzungsb. Akad. Berlin, 1933, стр. 380).

тензоры определенного порядка r, не являющиеся в то же время аффинными тензорами, могут быть все же аналитически заданы относительно любого декартова репера при помощи составляющих аффинного тензора порядка R более высокого, чем r, таким образом, что если их отнести к прямоугольному реперу, то $R-r$ этих составляющих обращается в нуль, а остальные r составляющих являются составляющими рассматриваемого эвклидова тензора. Так, например, при $n=4$ полубивектор определяется составляющими $p_{ij}+\sqrt{g}p^{kh}$ (i, j, k, h — четная перестановка) бивектора. Таким образом, надлежит исследовать, можно ли найти в аффинном пространстве с числом измерений $n=2\nu+1$ или 2ν такой аффинный тензор с N составляющими, чтобы при отнесении его к прямоугольному реперу $N-2^\nu$ этих составляющих обращались в нуль, а остальные 2^ν преобразовывались как составляющие спинора при преобразовании прямоугольного репера. Мы покажем, что это невозможно.

В самом деле, мы можем рассматривать комплексную область, пользуясь при необходимости переходом от вещественного к комплексному. Фундаментальную форму возьмем в виде суммы квадратов:

$$F \equiv x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

Мы имели бы линейное представление группы всех линейных подстановок, которое нам дало бы, в частности, линейное представление группы

$$x_1' = \alpha x_1 + \beta x_2, \quad x_2' = \gamma x_1 + \delta x_1, \quad x_3' = x_3, \ \ldots, \quad x_n' = x_n;$$
$$(\alpha\delta - \beta\gamma) = 1. \tag{17}$$

Это линейное представление было бы многозначным, так как при эвклидовом вращении

$$x_1' = x_1 \cos\vartheta - x_2 \sin\vartheta, \quad x_2' = x_1 \sin\vartheta + x_2 \cos\vartheta,$$
$$x_3' = x_3, \ \ldots, \quad x_n' = x_n,$$

где веществениый угол ϑ изменяется непрерывно от 0 до 2π, спинор преобравовывался бы линейной подстановкой, которая переходит непрерывно из тождественной подстановки $\xi' = \xi$ в подстановку $\xi' = -\xi$. ***Мы имели бы многозначное линейное*** *представление группы* (17), что невозможно, как мы видели в п. 85.

Ничего не меняя в доказательстве, можно было бы взять вместо группы (17) унитарную унимодулярную группу с переменными x_1, x_2, относительно которой мы доказали при помощи топологических соображений (п. 85) невозможность существования многозначных линейных представлений.

Мы приходим, таким образом, к следующей основной теореме:

Теорема. *Если спинор имеет тот геометрический смысл, который мы ему дали, то невозможно ввести спинорные поля в классическую технику исследования в римановой геометрии; то есть при произвольном выборе системы координат x^i пространства невозможно определить спинор при помощи конечного числа N составляющих u_α таким образом, чтобы u_α допускали ковариантные производные вида*

$$u_{\alpha,i}=\frac{\partial u_\alpha}{\partial x^i}+\Lambda_{\alpha i}^{\beta}u_\beta,$$

где $\Lambda_{\alpha i}^{\beta}$ являются определенными функциями от x^h [1]).

[1]) Ясно, что эта теорема может служить для уяснения точки зрения L. Infeld'а и van der Waerden'а (см. предыдущее примечание), не оправданной, однако, геометрически и физически.

БИБЛИОГРАФИЯ

Среди мемуаров, специально посвященных теории спиноров в собственном смысле слова, отметим:

Brauer R., Weyl H., *Spinors in n dimensions* (Am. J. of. Math., 57, 1935, стр. 425—449).

Wallage Givens J. *Tensor coordinates of linear spaces* (Annals of Math., 38, 1937, стр. 355—385).

Veblen O. *Spinors and projective Geometry* (Comptes Rendus Congrès Oslo, 1936, 1, 1937, стр. 111—127).

Из основных монографий, посвященных связи между теорией линейных представлений групп, теорией спиноров и квантовой механикой, отметим:

Weyl H., *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. 2. Auflage (Leipzig, Hirzel, 1931).

Wigner E., *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren* (Vieweg, 1931).

Van der Waerden B. L., *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik* (Berlin, Springer, 1932). (Ван дер Варден, *Метод теории групп в квантовой механике*, ОНТИ, Харьков, 1938).

Bauer E., *Introduction à la théorie des groupes et à ses applications à la Physique quantique* (Paris, 1933). (Э. Бауэр, *Введение в теорию групп и ее приложения в квантовой физике*, ОНТИ, Москва—Ленинград, 1937) [1].

Кроме мемуаров, цитированных в тексте и относящихся к проблеме уравнений Дирака в общей теории относительности, укажем специально:

Schouten J. A. *Dirac equantions in general relativity* (Journal of. Maht. and. Phys., 10, 1931, стр. 239—283).

[1] См. также: Смирнов В. И., *Курс высшей математики*, т. III, ОНТИ, Москва—Ленинград, 1933.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ II

Спиноры пространства $n > 3$ измерений. Спиноры в римановой геометрии